

DOSSIER DE VALIDATION

FLAMBEMENT EULERIEN

-

CM2 Version 2.17

Avril 2000

-

Computing Objects

Les formules et valeurs de référence utilisées dans ce dossier sont tirées de l'ouvrage "Théorie de la stabilité élastique" S. Timoshenko Librairie Polytechnique, C. Béranger, Paris & Liège, 1947.

Elles ont été formulées à partir de modèles de poutre et de coque sans cisaillement transverse (poutre d'Euler, coque de Kirchhoff), alors que nos calculs par éléments finis sont fondés sur des modèles de Mindlin (légèrement plus souples). De plus, nos calculs ne tiennent pas compte de l'effet des charges suiveuses (pression ou toute autre charge dont la direction ou l'intensité dépend du déplacement de la structure).

La tolérance d'arrêt des itérations de l'algorithme hybride Lanczos-Sous Espace est fixée à 10^{-4} . On a désactivé le dénombrement des valeurs propres (séquence de Sturm) en demandant les N valeurs les plus basses (domaine de recherche = [0, DBL_MAX]).

Tous les calculs ont été effectués sur PC Pentium Pro 200 MHz, 128 Mo RAM, Windows NT 4, en mode incore (toutes les matrices tenant en mémoire vive).

MODELES LINEIQUES

Poutre en compression axiale

Prenons :

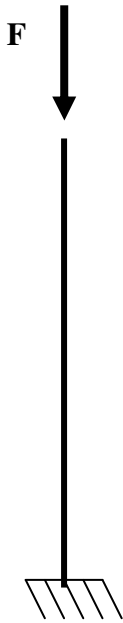
$$L = 10$$

$$S_0 = 1^E-4$$

$$I_{11} = I_{22} = 1^E-8$$

$$E = 2^E11, G = E / 2.6 \quad (v = 0.3)$$

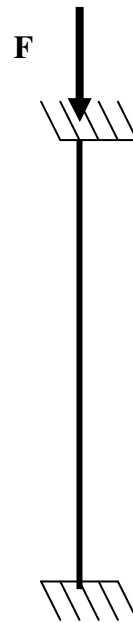
Forme générale des charges critiques (formules d'Euler)



a
encastré-libre



b
rotulé-rotulé



c
encastré-encastré

$$\lambda_n = \frac{EI}{L^2} (2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4}$$

$$\lambda_n = \frac{EI}{L^2} n^2 \pi^2$$

$$\lambda_n = \frac{EI}{L^2} \alpha^2$$

$$\alpha = \begin{cases} 2n\pi \\ 2(1 - \cos \alpha) - \alpha \sin \alpha = 0 \\ \text{soit } \alpha = 8.99, 15.45 \dots \cong (2n+1)\pi \end{cases}$$

Encastrée – Libre (cas a)

		Charges critiques λ		
n	λ_{th}	N = 10	N = 20	N = 40
0	49.35 (x2)	49.45	49.37	49.35
1	444.1 (x2)	452.4	446.1	444.6
2	1234 (x2)	1298	1249	1237
3	2418 (x2)	2667	2478	2432
iters / temps N = 8		1 / 0.23 s	1 / 0.33 s	1 / 0.39

Rotulée – Rotulée (cas b)

		Charges critiques λ		
n	λ_{th}	N = 10	N = 20	N = 40
1	197.4 (x2)	199.0	197.8	197.5
2	789 (x2)	815.7	796.0	791.1
3	1776 (x2)	1911	1809	1784
4	3158 (x2)	3589	3262	3182
iters / temps N = 8		1 / 0.27 s	2 / 0.34 s	2 / 0.44 s

Encastrée – Encastrée (cas c)

		Charges critiques λ		
n	λ_{th}	N = 10	N = 20	N = 40
1	789.6 (x2)	815.7	796.0	791.1
2	1616 (x2)	1725	1642	1622
3	3158 (x2)	3589	3262	3182
4	4774 (x2)	5776	5011	4830
iters / temps N = 8		1 / 0.26 s	1 / 0.35 s	2 / 0.45 s

Remarques :

1 - Tous les calculs EF ont été effectués avec un modèle de poutre de Timoshenko (avec CT), alors que les expressions analytiques ont été calculées pour un modèle d'Euler (sans CT).

Flambage en torsion d'une poutre en compression

Pour des profilés très minces, il peut arriver que le flambage ne se produise pas comme dans le paragraphe précédent mais plutôt en torsion pure.

Dans le cas (a) (poutre encastrée en pied) la charge critique est donnée par :

$$\lambda = GS \frac{I_{00}}{I_{11} + I_{22}}$$

I_{00} : inertie de torsion
 I_{11} et I_{22} : inerties de flexion.

Lorsque I_{00} est très faible, cette valeur peut-être inférieure à la charge d'Euler.

Prenons

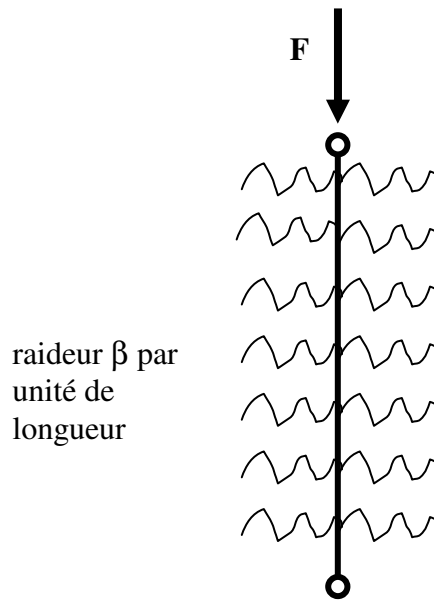
$$\begin{aligned} L &= 1 \\ S_0 &= 1^E-4 \\ I_{11} = I_{22} &= 1^E-8 \\ I_{00} &= 1^E-12 \\ E &= 2^E11 \\ G &= E / 2.6 \quad (\nu = 0.3) \end{aligned}$$

		Charges critiques λ		
n	λ_{th}	N = 10	N = 20	N = 40
I	384.6	384.6	384.6	384.6
<i>iters / temps</i> <i>N = 4</i>		1 / 0.24 s	1 / 0.27 s	1 / 0.34 s

Remarques :

- 1 - Cette valeur propre est multiple. Le sous-espace propre associé est de dimension égale au nombre d'élément. Chaque nœud peut partir en torsion indépendamment des autres.
- 2 - En fait, la théorie classique de la torsion utilisée ici ne permet pas de bien modéliser le phénomène. Il faudrait tenir compte du gauchissement des sections (théorie de la torsion gênée).

Poutre dans un milieu élastique (problème du battage de pieu)



Forme générale des charges critiques :

$$\lambda_n = \frac{EI}{L^2} \pi^2 n^2 + \beta \frac{L^2}{\pi^2 n^2}$$

Prenons :

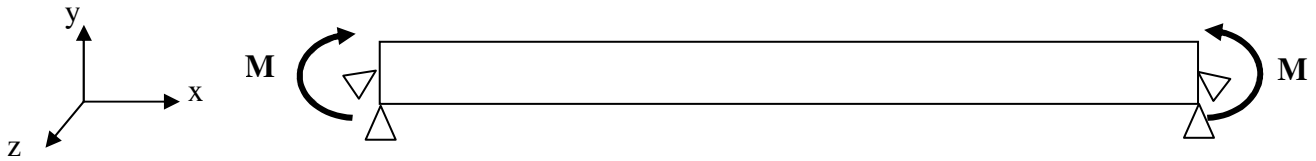
$L = 10$
 $S_0 = 1^E-4$
 $I_{11} = I_{22} = 1^E-8$
 $E = 2^E11$
 $G = E / 2.6$ ($\nu = 0.3$)
 $\beta = 100$

		Charges critiques λ		
n	λ_{th}	N = 10	N = 20	N = 40
1	1210 (x2)	1204	1209	1210
2	1042 (x2)	1061	1047	1044
3	1888 (x2)	2015	1920	1896
4	3198 (x2)	3644	3323	3245
iters / temps N = 8		1 / 0.26 s	1 / 0.35 s	3 / 0.47 s

Remarques :

- 1 - Pour la valeur de β choisie, les modes $n = 1$ et $n = 2$ sont en ordre inversé par rapport au cas sans milieu élastique.
- 2 - La convergence vers le mode $n = 1$ se fait par "en dessous". C'est possible pour le flambement Eulérien, alors qu'en modal on a toujours la convergence par "au-dessus".

Poutre soumise à la flexion pure (déversement)



Poutre bloquée en déplacement à ses extrémités ainsi que les rotations autour de X.

Prenons :

$$L = 10$$

$$S_0 = 1^E-4$$

$$I_{zz} = 1^E-8$$

$$I_{yy} = 1^E-6$$

$$I_{xx} = 1^E-7$$

$$E = 2^E11$$

$$G = E / 2.6 \quad (\nu = 0.3)$$

Forme des charges critiques :

$$\lambda_n = n\pi \frac{\sqrt{BC}}{L}$$

$$B = I_{zz} E \text{ (rigidité de flexion autour de Y)}$$

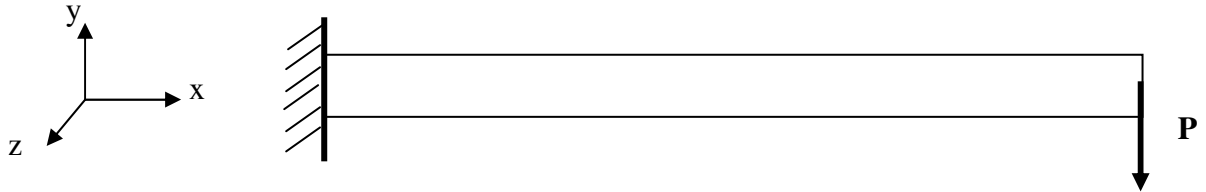
$$C = I_{xx} G \text{ (rigidité de torsion)}$$

		Charges critiques λ		
n	λ_{th}	N = 10	N = 20	N = 40
1	1232	1237	1233	1232
2	2464	2503	2473	2466
3	3696	3830	3727	3701
4	4928	5244	5000	4939
<i>iters / temps</i> <i>N = 4</i>		1 / 0.24 s	3 / 0.33 s	3 / 0.42 s

Remarques :

1 - Pour ce cas test, les charges critiques sont symétriques par rapport à 0.

Poutre soumise à une force concentrée en une extrémité (déversement)



Poutre encastree à une extrémité :
prenons :

$$\begin{aligned} L &= 10 \\ S_0 &= 1^E -4 \\ I_{zz} &= 1^E -8 \\ I_{yy} &= 1^E -6 \\ I_{xx} &= 1^E -7 \\ E &= 2^E 11 \\ G &= E / 2.6 \quad (\nu = 0.3) \end{aligned}$$

Forme de la première charge critique :

$$\lambda_1 = 4.013 \frac{\sqrt{BC}}{L^2}$$

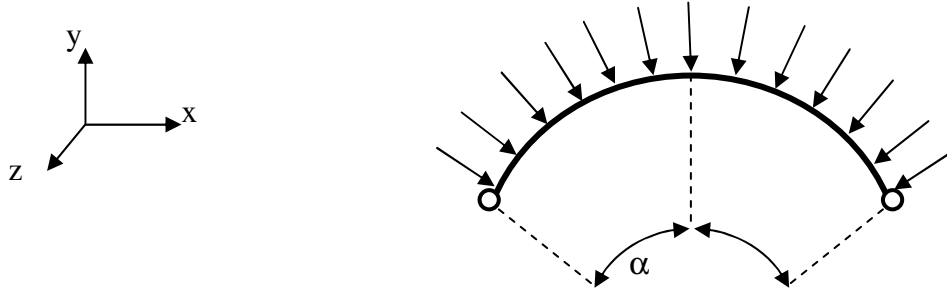
$$\begin{aligned} B &= I_{zz} E \text{ (rigidité de flexion autour de Y)} \\ C &= I_{xx} G \text{ (rigidité de torsion)} \end{aligned}$$

		Charges critiques λ		
n	λ_{th}	N = 10	N = 20	N = 40
1	24.89	24.97	24.91	24.89
2	?	64.94	63.89	63.63
3	?	108.1	103.9	102.8
4	?	155.5	145.1	142.3
iters / temps $N = 4$		1 / 0.26 s	3 / 0.33 s	4 / 0.46 s

Remarques :

- 1 - Pour ce cas test, les charges critiques sont symétriques par rapport à 0.
- 2 - Seule la première charge critique est donnée dans la référence (*S. Timoshenko*).
- 3 - La position de la force P par rapport à l'axe neutre peut avoir une influence sensible sur la charge critique. Si elle se trouve en peau supérieure, la charge critique sera plus faible. En peau inférieure, elle aura en revanche un effet stabilisateur. C'est en fait un cas de "charge suiveuse". Pour appréhender ce phénomène il est nécessaire de rajouter dans la matrice géométrique des termes provenant de la différenciation de la force par rapport au déplacement (et rotation).
- 4 - La formule utilisée surestime la charge critique pour les poutres en I. En effet, pour ces dernières le gauchissement des sections, qui a été négligé (modèle à section rigide) peut avoir un effet important.

Arc rotulé en compression radiale



Prenons :

$$\begin{aligned} R &= 10 \\ S_0 &= 1^E-4 \\ I_{11} &= I_{22} = 1^E-8 \\ E &= 2^E11 \\ G &= E / 2.6 \quad (\nu = 0.3) \end{aligned}$$

Forme générale de la première charge critique :

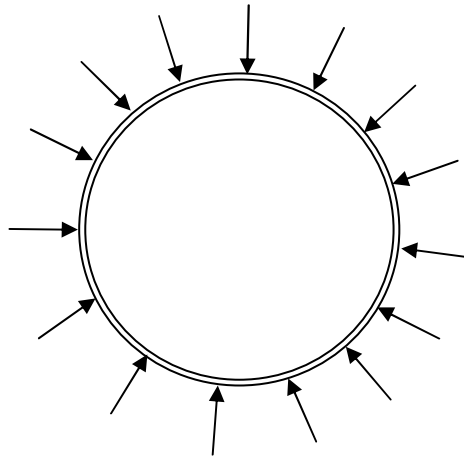
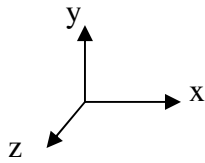
$$\lambda_1 = \frac{EI}{R^3} \frac{\pi^2}{\alpha^2 - 1}$$

		Première charge critique λ		
α	λ_{th}	N = 10	N = 20	N = 40
10°	646	668.8	656.5	653.4
30°	70	73.85	72.37	72.00
60°	16	18.09	17.61	17.49
90°	6	6.917	6.634	6.565
iters / temps $N = 4$		1 / 0.23 s	1 / 0.24 s	1 / 0.26 s

Remarques :

- 1 - Seule la première charge critique est donnée dans la référence (S. Timoshenko).
- 2 - Cette formule a été établie en supposant nul l'effort tranchant dans la poutre (poutre accrochée en état de contrainte membranaire seule). De plus, la pression est une force suiveuse alors que dans nos calculs numériques nous la considérons constante. Ceci explique certainement les écarts obtenus (+10 % pour les grandes ouvertures).
- 3 - Les temps et nombre d'itérations dépendent peu de l'angle α .

Anneau circulaire uniformément comprimé



Prenons

$$R = 0.1$$

$$S_0 = 1^E-4$$

$$I_{11} = I_{22} = 1^E-9 / 12$$

$$E = 1^E9$$

$$G = E / 2.6 \quad (\nu = 0.3)$$

Forme de la première charge critique :

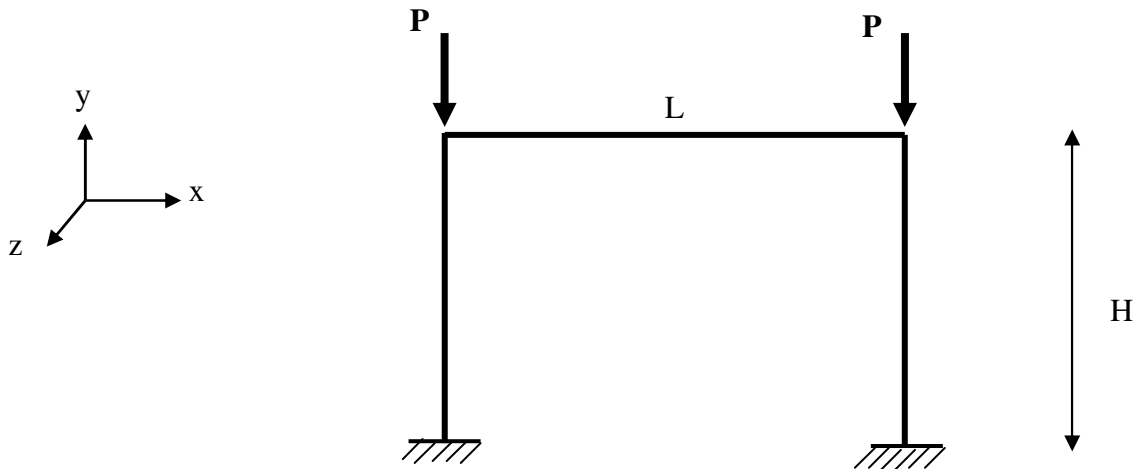
$$\lambda_1 = \frac{3EI}{R^3}$$

λ_{th}	N = 20	N = 40	N = 80
250	289.0	276.4	273.3
<i>iters / temps</i> $N = 1$	1 / 0.27 s	2 / 0.33 s	2 / 0.41 s

Remarques :

- 1 - Seule la première charge critique est donnée dans la référence (*S. Timoshenko*).
- 2 - On a maillé le cercle complet. N est le nombre total d'éléments.
- 3 - La pression est une force suiveuse. Il faudrait en tenir compte dans le calcul numérique pour retrouver la valeur théorique.

Portique à deux poteaux et une poutre horizontale



$H = 1$
 $L = 2$
 $E = 2.1E11$ $\nu = 0.3$
 $S_0 = 3^E-4$
 $I_{00} = 1^E-8$ (torsion)
 $I_{11} = 2.25E-8$
 $I_{22} = 2.5^E-9$

		$I_{zz} = 2.25E-8$ $I_{xx} = 2.5^E-9$		
n	λ_{ref}	N = 10	N = 20	N = 40
1	3165	3176	3168	3166
2	11658	11675	11657	11652
3	12059	12256	12102	12063
<i>iters / temps</i> $N = 3$		1 / 0.28 s	1 / 0.40 s	2 / 0.65 s

		$I_{xx} = 2.25E-8$ $I_{zz} = 2.5^E-9$		
n	λ_{ref}	N = 10	N = 20	N = 40
1	1295	1298	1296	1295
2	2960	2968	2962	2961
3	11659	11868	11705	11664
<i>iters / temps</i> $N = 3$		1 / 0.31 s	1 / 0.40 s	1 / 0.58 s

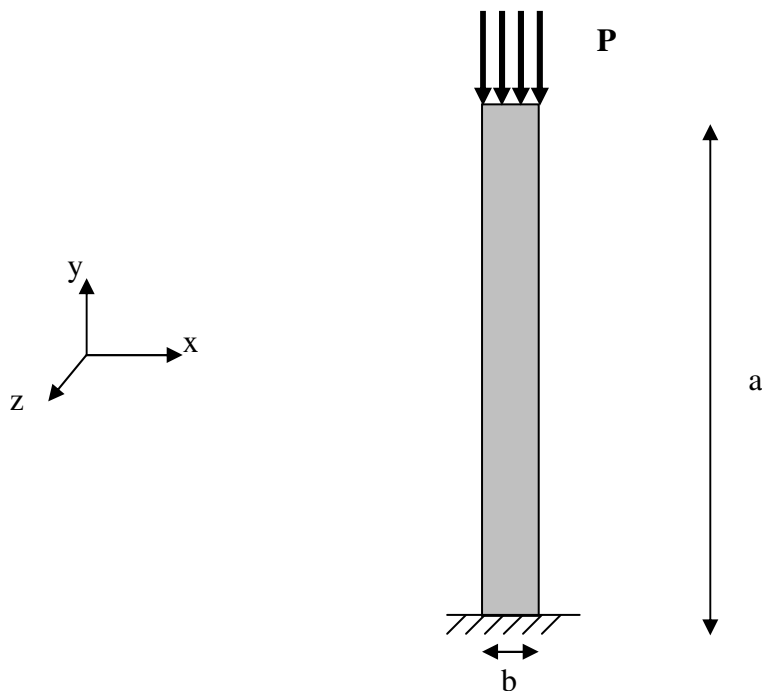
Remarques :

- 1 - Les valeurs de référence sont numériques (*Linear Buckling Analysis of Bar Structures*, ??).
- 2 - Les 3 poutres sont identiques (sauf la longueur), et discrétisées chacune en N éléments.

MODELES COQUES

Poutre en compression axiale

Reprenons le flambage des poutres droites avec un modèle de coque.



On rappelle la formule d'Euler dans le cas encastré-libre :

$$\lambda_n = \frac{EI}{a^2} (2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4}$$

Pour se mettre dans les mêmes conditions que précédemment, prenons :

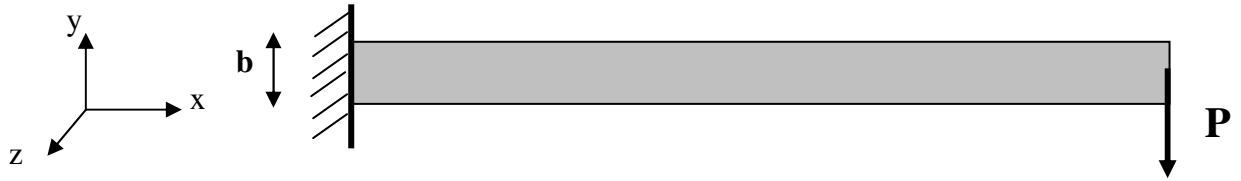
$a = 10$
 $b = 0.01$
 $h = 0.01$ ($S = 1^E-4$ $I_{11} = I_{22} = 1^E-8 / 12$)
 $E = 24^E11$ $\nu = 0.0$

		Charges critiques λ		
n	λ_{th}	N = 10	N = 20	N = 40
0	49.35 (x2)	49.55	49.40	49.36
1	444.1 (x2)	461.1	448.3	445.1
2	1234 (x2)	1373	1266	1242
3	2418 (x2)	3004	2545	2449
iters / temps N = 8		1 / 0.21 s	3 / 0.52 s	3 / 0.84 s

Remarques :

- 1 - On n'a mis qu'un seul élément dans le sens de la largeur.
- 2 - On retrouve bien les valeurs du modèle de poutre, mais dans une direction seulement. Pour les modes dans le plan, il faudrait mailler très fin dans les deux directions (10 x 10000 !)

Plaque console soumise à une force concentrée en une extrémité



$$L = 10$$

$$b = 0.03$$

$$h = 0.01 \quad (\Rightarrow I_{xx} = 1^E-8 \text{ (torsion)}, I_{yy} = 2.25E-8, I_{zz} = 2.5^E-9)$$

$$E = 2^E11, G = E / 2.6 \quad (v = 0.3)$$

Forme de la première charge critique :

$$\lambda_1 = 4.013 \frac{\sqrt{BC}}{L}$$

$$B = I_{zz} E \text{ (rigidité de flexion autour de Y)}$$

$$C = I_{xx} G \text{ (rigidité de torsion)}$$

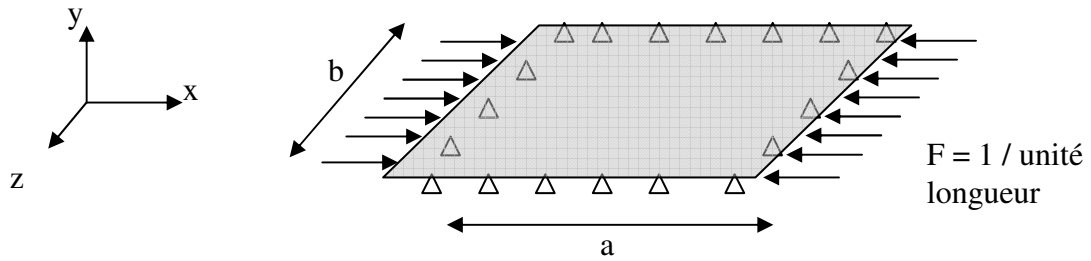
Maillage réglé Q4

		Charges critiques λ		
n	λ_{th}	N = 10	N = 20	N = 40
1	24.89	24.12	23.67	23.50
2	63.72*	64.41	61.10	60.18
3	103.2*	113.0	100.5	97.49
4	143.3*	177.4	142.9	135.5
<i>iters / temps</i> <i>N = 4</i>		1 / 0.39 s	1 / 0.53 s	2 / 0.94 s

Remarques :

- 1 - On n'a mis qu'un seul élément dans le sens de la largeur.
- 2 - Les valeurs $n = 2, 3, 4$ de la colonne λ_{th} sont reprises du calcul de poutre avec $N = 40$.
- 3 - La valeur de l'inertie de torsion (1^E-8) ne correspond pas exactement à la valeur réelle pour cette poutre. Un calcul éléments-finis donne 0.68^E-8 (avec $v = 0.3$). Ceci peut expliquer les valeurs plus faibles obtenues avec le modèle de coque.
- 4 - En maillant dans le plan XZ ($h = 0.03, b = 0.01$), la plaque travaille alors en flexion, et pour obtenir les mêmes charges critiques, il faut mailler très fin (1×2000). On trouve les valeurs 23.79, 60.74, 97.90, 135.1. Ceci est dû à la trop grande rigidité en cisaillement membranaire de l'élément.
- 5 - On retrouve bien la symétrie des valeurs propres par rapport à 0.

Plaque en compression uniforme et en appui simple sur son pourtour.



$b = 10$
 $h = 0.08$
 $E = 2 \times 10^{11}, \nu = 0.3$

Forme générale des charges critiques :

$$\lambda_{nm} = \frac{\pi^2 D}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Maillage réglé Q4

a = b = 10					a = 20, b = 10				
m, n	λ_{th}	N = 10	N = 20	N = 40	m, n	λ_{th}	N = 10	N = 20	N = 40
1,1	7230	7331	7255	7236	2,1	7230	7399	7271	7240
2,1	11297	11855	11431	11330	3,1	8486	9226	8652	8526
3,1	20084	22916	20724	20240	1,1	11298	11466	11339	11308
2,2	28922	30594	29324	29020	4,1	11298	13838	11820	11422
4,1	32650	37580	34692	33137	5,1	15202	22421	16506	15506
iters / temps N = 5 modes		2 / 2.26 s	2 / 10.3 s	2 / 56 s			2 / 2.28 s	3 / 11.3 s	2 / 56 s

Maillage Delaunay Q4

a / b = 1					a / b = 2				
m,n	λ_{th}	N = 10	N = 20	N = 40	m,n	λ_{th}	N = 10	N = 20	N = 40
1,1	7230	7378	7265	7237	2,1	7230	7696	7328	7262
2,1	11297	11960	11439	11335	3,1	8486	9521	8663	8546
3,1	20084	22940	20674	20229	1,1	11298	11556	11424	11332
2,2	28922	31277	29419	29048	4,1	11298	13339	11707	11425
4,1	32650	38625	34293	33054	5,1	15202	19671	16048	15474
iters / temps N = 4 modes		3 / 2.1 s	3 / 11.6 s	3 / 52 s			2 / 1.9 s	2 / 7.1 s	3 / 29 s

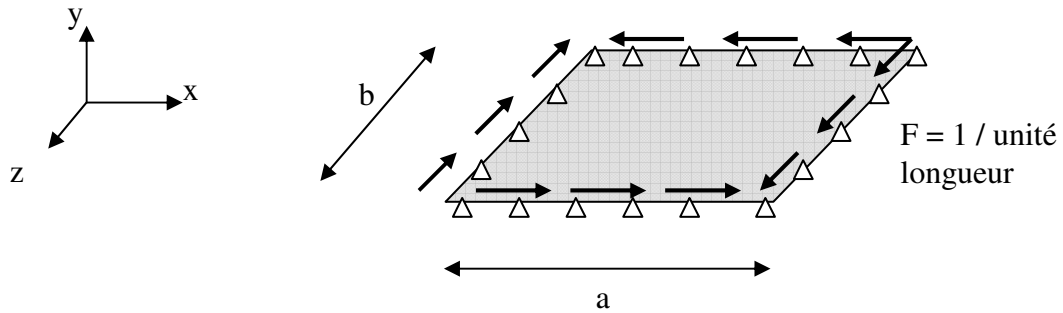
Maillage Delaunay T3

a / b = 1					a / b = 2				
m,n	λ_{th}	N = 10	N = 20	N = 40	m,n	λ_{th}	N = 10	N = 20	N = 40
1,1	7230	7745	7294	7243	2,1	7230	9826	7629	7290
2,1	11297	13479	11527	11343	3,1	8486	11518	9582	8606
3,1	20084	27792	21048	20244	1,1	11298	14470	11527	11343
2,2	28922	38605	29928	29106	4,1	11298	27496	13717	11528
4,1	32650	54575	35898	33090	5,1	15202	30057	20327	15735
iters / temps N = 5 modes		2 / 1.6 s	3 / 7.4 s	3 / 36 s			2 / 1.1 s	2 / 4.6	2 / 20 s

Remarques :

- 1 - m est le nombre de demi-onde dans la direction a, et n dans la direction b.
- 2 - On a discrétisé en N éléments dans les deux directions même pour le cas a = 20, b = 10. Pour capter correctement les modes (4,1) et (5,1) il faut au minimum 20 éléments dans la direction a.
- 3 - Pour reprendre les efforts de compression, la plaque doit être modélisée avec les DDLs U_x et U_z . On a donc pris un modèle de coque et pour économiser le temps de calcul on a bloqué les rotations R_y .

Plaque en cisaillement uniforme et en appui simple sur son pourtour.



Prenons :

$$b = 10$$

$$h = 0.01$$

$$E = 2^E 11, \nu = 0.3$$

Forme générale des charges critiques :

$$\lambda_n = \frac{k_n D \pi^2}{b^2 h}$$

Maillage réglé Q4

a = b = 10 k = 9.34					a = 14, b = 10 k = 7.3				
n	λ_{th}	N = 10	N = 20	N = 40	n	λ_{th}	N = 10	N = 20	N = 40
1	16883	18361	17214	16943	1	13196	13858	13423	13241
2	?	23551	21495	21023	2	?	16726	15646	15330
3	?	60999	48145	45621	3	?	31550	29832	28584
4	?	66807	52168	49305	4	?	41997	33790	32178
iters / temps N = 4 modes		3 / 2.3 s	4 / 11 s	4 / 63 s			3 / 2.3 s	4 / 11 s	4 / 63 s

Maillage Delaunay Q4

a = b = 10 k = 9.34					a = 14, b = 10 k = 7.3				
n	λ_{th}	N = 10	N = 20	N = 40	n	λ_{th}	N = 10	N = 20	N = 40
1	16883	18904	17199	16948	1	13196	13992	13715	13276
2	?	23994	21405	20999	2	?	17023	15952	15372
3	?	66283	47741	45573	3	?	30728	30331	28608
4	?	72997	51946	49389	4	?	39385	34599	32163
iters / temps N = 4 modes		2 / 2.1 s	4 / 13 s	3 / 56 s			3 / 2.0 s	4 / 10 s	4 / 44 s

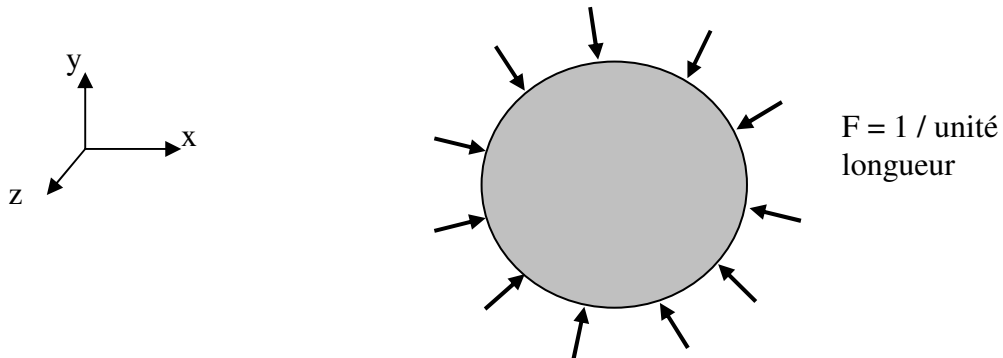
Maillage Delaunay T3

a = b = 10 k = 9.34					a = 14, b = 10 k = 7.3				
<i>n</i>	λ_{th}	N = 10	N = 20	N = 40	<i>n</i>	λ_{th}	N = 10	N = 20	N = 40
1	16883	22617	17478	16965	1	13196	23258	13933	13289
2	?	30044	21825	21032	2	?	27629	16377	15385
3	?	98809	49984	45632	3	?	71588	33330	28794
4	?	114139	54441	49340	4	?	108579	3774	32391
iters / temps N = 4 modes		2 / 1.7 s	3 / 8.3 s	4 / 44 s			2 / 1.4 s	3 / 6.6 s	4 / 35 s

Remarques :

- 1 - On a discrétisé en N éléments dans les deux directions, même pour le cas a / b = 1.4 .
- 2 - Les valeurs propres sont symétriques par rapport à 0 (exactement avec les maillages réglés, de manière approchée avec les maillages Delaunay).

Plaque circulaire en compression et encastrée sur son pourtour.



Prenons :

$$\begin{aligned} R &= 10 \\ h &= 0.01 \\ E &= 2^{11}, \nu = 0.3 \end{aligned}$$

Forme de la première charge critique (pour le flambage axisymétrique) :

$$\lambda_1 = \frac{14.68 D}{R^2}$$

Maillage Delaunay Q4

n	λ_{th}	N = 20	N = 40	N = 80
1	2688	3085	2789	2713
2	?	6000	5224	4921
3	?	6948	5258	4930
4	?	10243	8273	7665
iters / temps N = 4 modes		3 / 0.8 s	4 / 2.7 s	2 / 11 s

Maillage Delaunay T3

n	λ_{th}	N = 20	N = 40	N = 80
1	2688	120809	4230	2768
2	?	804240	14199	5192
3	?	913117	16159	5290
4	?	2537000	32034	8690
iters / temps N = 4 modes		1 / 0.42 s	2 / 1.6 s	4 / 8.0 s

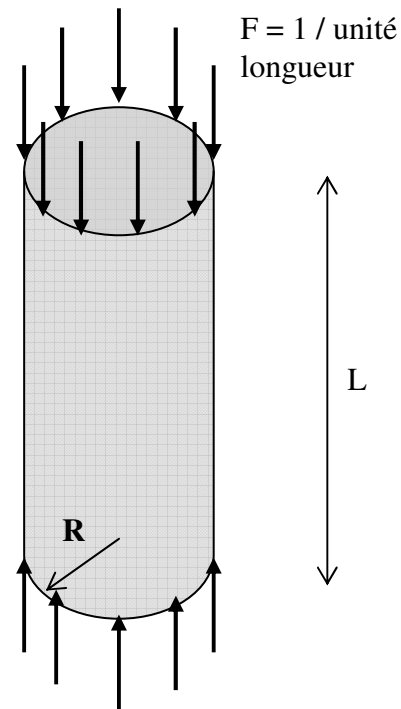
Remarques :

- 1 - N est le nombre de nœuds sur tout le pourtour.
- 2 - Les modes 2 et 3 semblent être doubles et non axisymétriques.
- 3 - L'élément T3 converge plus lentement vers la solution que le Q4.

Cylindre en compression axiale simplement appuyé

$$\begin{aligned} E &= 2^E 11 \\ \nu &= 0.3 \\ h &= 1^E - 3 \\ L &= 20 \\ R &= 10 \end{aligned}$$

Déplacements nuls aux extrémités.
Rotations libres aux extrémités



Forme de la première charge critique (flambage axisymétrique et cylindre "long") :

$$\lambda_1 = \frac{Eh^2}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}}$$

Le flambage s'effectue avec un grand nombre d'ondes dans la direction axiale et de manière axisymétrique. Le nombre d'ondes dans la direction axiale est donné par :

$$n = \frac{0.29}{\sqrt{Rh}}$$

soit ici $n \approx 6$. Il faut donc au minimum 50 éléments dans la direction axiale.

Radialement, il apparaît également nécessaire de mailler très fin. Par symétrie des modes attendus, on ne maille qu'un quart du cylindre.

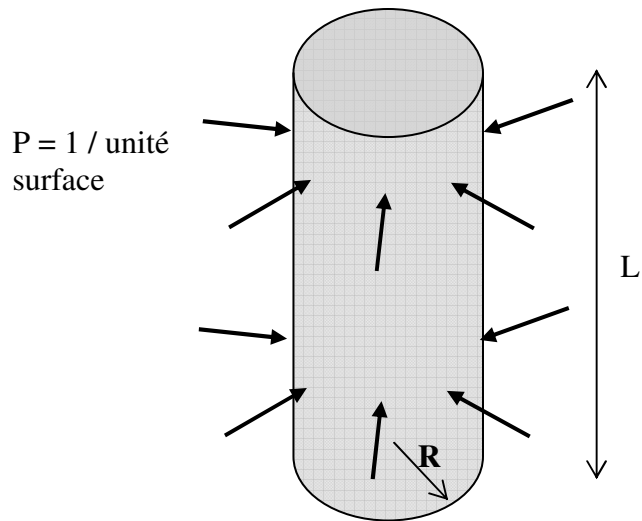
Maillage réglé Q4

n	λ_{th}	Nr = 20 Nl = 50	Nr = 40 Nl = 50	Nr = 20 Nl = 100	Nr = 40 Nl = 100
1	12104	18213	12401	17998	12209
iters / temps N = 1 mode		10 / 27 s	9 / 70 s	8 / 52 s	15 / 183 s

Cylindre en compression radiale simplement appuyé

$$\begin{aligned} E &= 1^E-9 \\ \nu &= 0.0 \\ h &= 1^E-3 \\ L &= 10 \\ R &= 0.1 \end{aligned}$$

Déplacements nuls aux extrémités.
Rotations libres aux extrémités



Forme générale des charges critiques (cylindre très long) :

$$\lambda_n = \frac{EI}{1-\nu^2} \frac{n^2 - 1}{R^3}$$

En prenant $\nu = 0$, on retrouve le cas d'un anneau uniformément comprimé.

Maillage réglé Q4

n	λ_{th}	Nr = 20 Nl = 10	Nr = 40 Nl = 10	Nr = 80 Nl = 10	Nr = 160 Nl = 20
2	250	368	345	339	335
iters / temps N = 1 mode		3 / 4.5 s	2 / 8.75 s	2 / 17 s	3 / 91 s

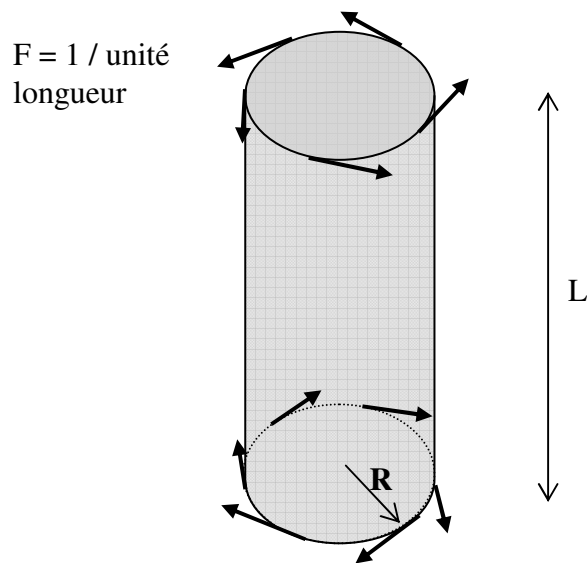
Remarques :

- 1 - Nr est le nombre d'éléments sur un cercle complet. Nl est le nombre d'éléments selon l'axe. On a maillé le cylindre entier.
- 2 - On ne converge pas vers la valeur théorique. Ceci s'explique encore par le fait que la pression est une charge suivieuse. Curieusement, pour le cylindre la différence est plus grande que pour l'anneau circulaire (+30% au lieu de +10%).
- 3 - Si le cylindre est suffisamment long (ici $L/R = 50$), la valeur de la charge critique ne dépend plus de L. C'est ce que l'on a observé.

Cylindre en torsion simplement appuyé

$$\begin{aligned} E &= 1^E 9 \\ \nu &= 0.3 \\ h &= 1^E -3 \\ L &= 5 \\ R &= 0.1 \end{aligned}$$

Déplacements bloqués en bas.
Rotations libres aux extrémités



Forme de la première charge critique (cylindre très long) :

$$\lambda_1 = \frac{E h^{5/2}}{3\sqrt{2} R^{3/2} (1 - \nu^2)^{3/4}}$$

Maillage réglé Q4

n	λ_{th}	Nr = 40 NI = 20	Nr = 40 NI = 40	Nr = 40 NI = 80	Nr = 80 NI = 80
1	253	301	268	258	254
iters / temps N = 1 mode		3 / 25 s	2 / 47 s	3 / 103 s	2 / 283 s

Remarques :

- 1 - Si le cylindre est suffisamment long (ici $L/R = 50$), la valeur de la charge critique ne dépend plus de L . C'est ce que l'on a observé.
- 2 - Le mode de flambage étant hélicoïdal, on a donc dû mailler le cylindre entier.
- 3 - Les valeurs propres sont symétriques par rapport à 0.

Profilé à section carrée soumis à une force concentrée en une extrémité



$$\begin{aligned} L &= 5 \\ b &= 0.02 \\ h &= 0.001 \\ E &= 2^{E11} \\ \nu &= 0.3 \end{aligned}$$

Forme de la première charge critique (modèle de poutre) :

$$\lambda_1 = 4.013 \frac{\sqrt{BC}}{L^2}$$

$B = I_{zz} E$ (rigidité de flexion)

$C = I_{xx} G$ (rigidité de torsion)

Ici, on a $I = \frac{2}{3} h b^3$

soit $B = I E = 1120$

et par le calcul on trouve $C = 640$, ce qui donne $\lambda_1 = 136$

Maillage réglé Q4

		Charges critiques λ			
n	λ_{th}	N = 1 x 100	N = 1 x 200	N = 1 x 400	N = 2 x 400
1	136	174.4	148.3	141.0	139.6
2	347	445.3	378.5	359.9	353.6
3	560	717.4	609.6	579.6	558.8
4	775	939.	840.4	798.9	655.3
iters / temps N = 4		3 / 8.0 s	3 / 16 s	2 / 30 s	20 / 173 s

Remarques :

- 1 - On n'a mis qu'un seul élément dans le sens de la largeur (x4).
- 2 - La force est modélisée par une force répartie de $1/4b$ par unité de longueur (somme = 1).
- 3 - Les valeurs de la colonne λ_{th} sont reprises du calcul de poutre avec $N = 40$ et $I_{11} = I_{22} = 5.33E-9$, $I_{00} = 7.9E-9$.

Profilé à section circulaire soumis à une force concentrée en une extrémité



$$\begin{aligned} L &= 5 \\ R &= 0.01 \\ h &= 0.001 \\ E &= 2^{11} \\ \nu &= 0.3 \end{aligned}$$

Forme de la première charge critique (modèle de poutre) :

$$\lambda_1 = 4.013 \frac{\sqrt{BC}}{L^2}$$

$B = I_{zz} E$ (rigidité de flexion)

$C = I_{xx} G$ (rigidité de torsion)

Ici, on a $I_{00} = 2\pi R^3 h$

soit $C = I_{00} G = 507$

et par le calcul on trouve $B = 680$, ce qui donne $\lambda_1 = 94.6$

Maillage réglé Q4

		Charges critiques λ		
n	λ_{th}	N = 20 x 100	N = 20 x 200	N = 20 x 400
1	94.6	122.5	99.88	93.2
2	242	311.5	253.6	237.0
3	390	498.0	405.4	378.8
4	540	679.2	552.7	516.3
iters / temps N = 4		5 / 71 s	3 / 130 s	6 / 320 s

Remarques :

- 1 - On n'a mis qu'un seul élément dans le sens de la largeur (x4).
- 2 - La force est modélisée par une force répartie de $1/2\pi R$ par unité de longueur (somme = 1).
- 3 - Les valeurs de la colonne λ_{th} sont reprises du calcul de poutre avec $N = 40$ et $I_{11} = I_{22} = 3.25E-9$, $I_{00} = 6.3E-9$.