

DOSSIER DE VALIDATION

STATIQUE LINEAIRE

-

CM2 Version 2.17

Avril 2000

-

Computing Objects

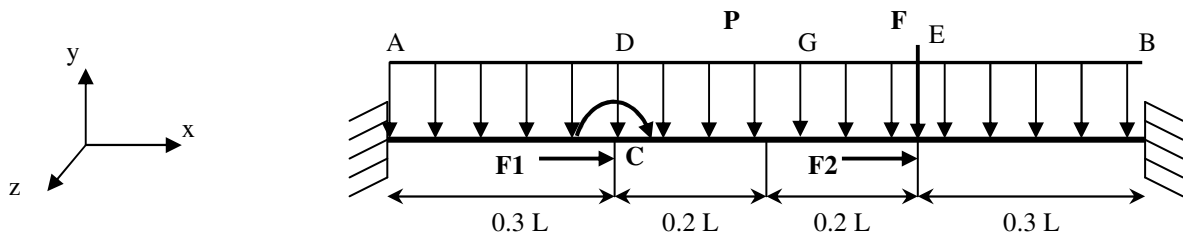
Les formules et valeurs de référence utilisées dans ce dossier sont tirées du "Guide de validation des progiciels de calcul de structures", AFNOR technique, 1990.

En général, les valeurs de référence de ce guide ont été calculées analytiquement à partir des modèles de poutre et de plaque sans cisaillement transverse (modèles Euler-Bernouilli et Kirchhoff-Love). En revanche, nos calculs par éléments finis sont fondés sur des modèles avec cisaillement transverse (modèles Timoshenko et Mindlin). Pour simuler le modèle de poutre sans CT, nous avons multiplié par 1000 les sections effectives de cisaillement transverse.

Tous les calculs ont été effectués sur PC Pentium Pro 200 Mhz, 128 Mo RAM, Windows NT4, en mode incore (toutes les matrices tenant en mémoire vive).

MODELES LINEIQUES

SSLL01 - Poutre élançée sur deux appuis encastrés



Axe X = axe de la poutre

Axe Y = troisième nœud

Modèle 2D poutre U_x , U_y , R_z

Données fournies :

$$L = 1$$

$$I_{11} = I_{22} = 1.7^E-8$$

$$E = 2.1^E11$$

$$F = -20000$$

$$F1 = 30000$$

$$F2 = 10000$$

$$P = -24000$$

$$C = -3000$$

Données supplémentaires (nécessaires au calcul mais n'ayant pas, ou peu, d'influence sur les résultats) :

$$G = E / 2.6 \quad (v = 0.3)$$

$$S_0 = 1^E-3$$

$$S_1 = S_2 = 1000 S_0$$

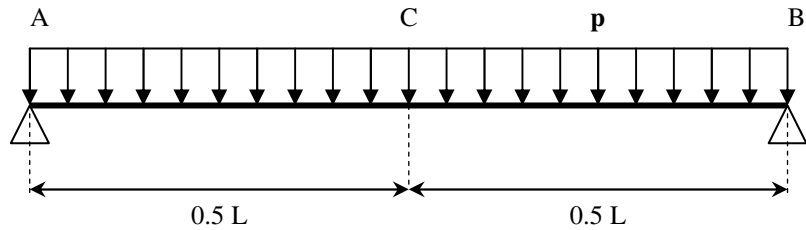
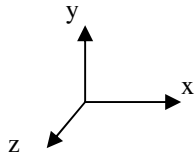
$$I_{33} = 0.1666$$

Grandeur physique Position	CM2 1 EF, 0 DDL	CM2 4 EFs, 9 DDLs	Référence
Effort tranchant, T(G)	-540.003	-540.003	540
Moment fléchissant, M(G)	2800	2800	2800
Flèche U_y (G)	4.90196 E-2	4.90197 E-2	4.90 E-2
Réaction horizontale R_x (A)	-24000	-24000	-24000

Remarques :

1 - Un seul élément suffit. La déformée interne est post-traitée en utilisant les formules exactes des poutres élançées (sans CT).

SSLL02 - Poutre courte sur deux appuis articulés



Axe X = axe de la poutre

Axe Y = troisième nœud

Modèle 2D poutre U_x, U_y, R_z

Données fournies :

$$L = 1.44$$

$$I_{11} = I_{22} = 2810E-8$$

$$E = 2^E 11$$

$$\nu = 0.3$$

$$S_x = 31^E -4$$

$$S_y = S_z = S_x / 2.42$$

$$p = -1^E 5$$

Données supplémentaires :

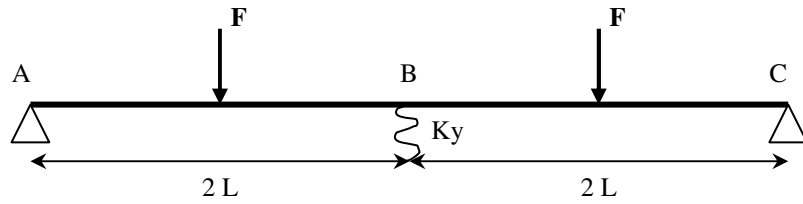
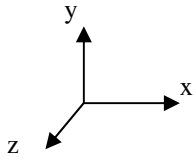
$$I_{33} = 1^E -4$$

Grandeur physique Position	CM2 1 EF, 2 DDLs	CM2 2 EFs, 4 DDLs	Référence
Flèche $U_y(G)$	-0.9962 E-3	-1.25926 E-3	-1.25926 E-3

Remarques :

1 - Un seul élément ne suffit pas car la déformée interne est post-traitée en utilisant les formules exactes des poutres élancées (sans CT). Ce qui donne la valeur de -0.9962 E-3 et non pas -1.2143 E-3 comme indiqué par erreur dans la référence ("Guide de validation des progiciels de calcul des structures"). Avec 2 éléments, on obtient bien la valeur exacte.

SSLL03 - Poutre élastique sur trois appuis



Axe X = axe de la poutre

Axe Y = troisième nœud

Modèle 2D poutre U_x , U_y , R_z

Données fournies :

$$L = 3$$

$$I_{11} = I_{22} = 6.3E-4$$

$$E = 2.1E11$$

$$K_y = 2.1E6$$

$$F = -42000$$

Données supplémentaires :

$$\nu = 0.3$$

$$S_x = 1E-2$$

$$S_y = S_z = 1000 S_x$$

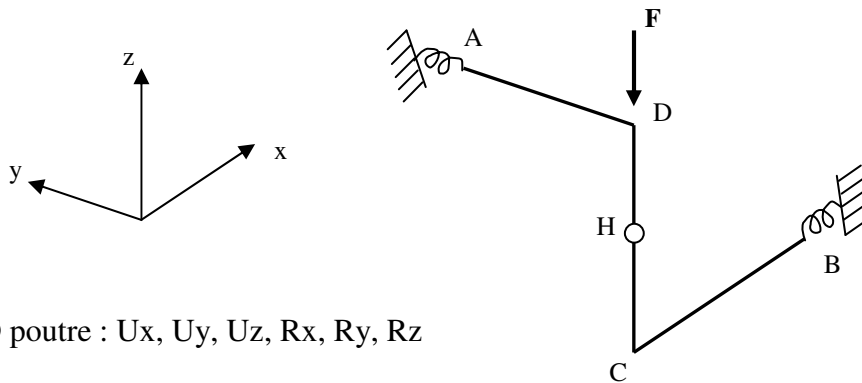
$$I_{33} = 1E-4$$

Grandeur physique Position	CM2 2 EFs, 4 DDLs	Référence
Moment fléchissant $M(B)$	62999.7	63000
Flèche $U_y(B)$	-0.010	-0.010
Réaction $R_y(B)$	21000.1	21000

Remarques :

1 - Avec un coefficient de 1000 sur la surface effective de CT, on obtient une petite différence par rapport aux valeurs de référence.

SSLL04 – Structure spatiale sur appuis élastiques



Modèle 3D poutre : $U_x, U_y, U_z, R_x, R_y, R_z$

Données fournies :

$L = 2$ (3 poutres de même longueur)

$I_{11} = I_{22} = 1E-6 \quad J = I_{00} = 2E-6$

$E = 2.1E11 \quad G = 7.875E10$

$S_0 = 1E-3$

$K_y(A) = K_x(B) = 52500$ (raideur de translation)

$C_x(A) = C_z(A) = 52500$ (raideur de torsion)

$C_y(B) = C_z(B) = 52500$ (raideur de torsion)

$F = -10000$

Rotule en H, blocage $\theta_y(A)$ et $\theta_x(B)$.

Données supplémentaires :

$S_1 = S_2 = 1000 S_0$

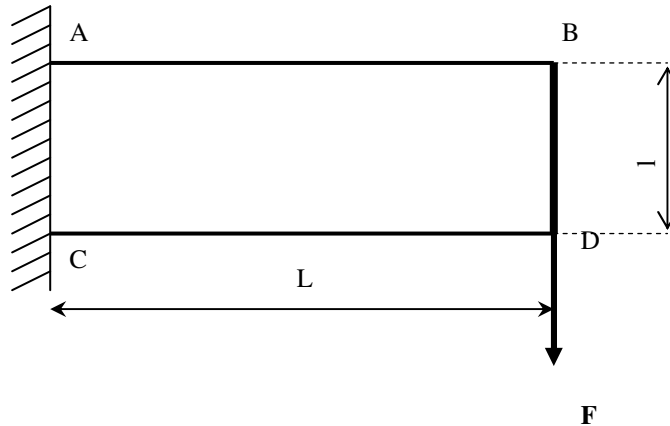
Grandeur physique Position	CM2 4 EFs, 26 DDLs	Référence
Moment $M_x(A)$	+8438.14	-8437.5
Moment $M_y(A)$	+1562.3	-1562.5
Moment $M_z(A)$	-3124.6	3125
Moment $M_x(B)$	1562.5	1562.5
Moment $M_y(B)$	8437.06	8437.5
Moment $M_z(B)$	3125	3125
Déplacement $U_y(A)$	-2.9762 E-2	-2.9762 E-2
Rotation $\theta_x(A)$	16.073 E-2	16.071 E-2
Déplacement $U_z(D)$	-37.007 E-2	-37.004 E-2

Remarques :

1 - On a mis des raideurs en rotation R_{Ax} et R_{Az} et non pas R_{Ay} et R_{Az} comme indiqué en référence.

2 - On a en plus bloqué U_{Ax} , U_{Az} et U_{By} , U_{Bz} , pour stabiliser le problème.

SSLL05 – Bilame : poutres encastrées reliées par un élément indéformable



Modèle 2D poutre : U_x, U_y, R_z

Données fournies :

$$L = 2$$

$$l = 0.2$$

$$I_{11} = I_{22} = (4/3) E^{-8}$$

$$E = 2^E 11$$

$$S_0 = 2^E -2$$

$$F = -1000$$

Données supplémentaires :

$$S_1 = S_2 = 1000 S_0$$

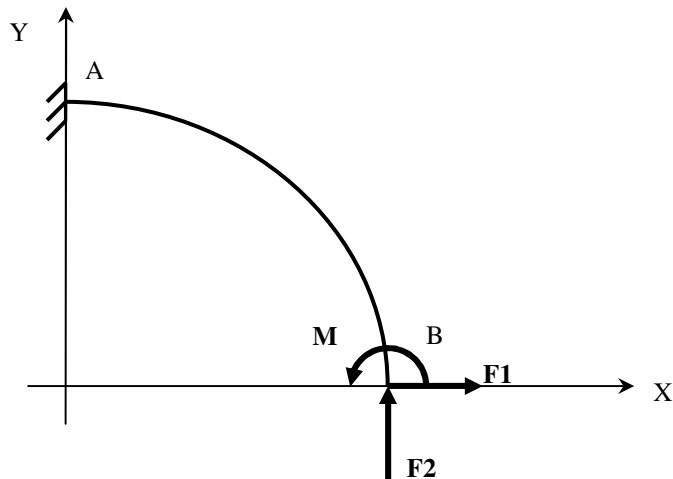
$$\nu = 0.3$$

Grandeur physique Position	CM2 2 EFs, 2 DDLs	Référence
Déplacement $U_y(B)$	-0.125	-0.125
Déplacement $U_y(D)$	-0.125	-0.125
Réaction $R_y(A)$	500	500
Moment $M_z(A)$	500	500
Réaction $R_y(C)$	500	500
Moment $M_z(C)$	500	500

Remarques :

- 1 - Pour la liaison rigide, on a utilisé un élément `link` (pénalisation) sur les DDLs U_y de B et D.

SSLL06 – Arc mince encastré en flexion plane



Modèle 2D poutre : U_x , U_y , R_z

Données fournies :

$$R = 3$$

$$I_{11} = I_{22} = 4.637E-9$$

$$E = 2^{E11}$$

$$S_0 = 1.131 E-4$$

$$F1 = -10$$

$$F2 = 5$$

$$M = 8$$

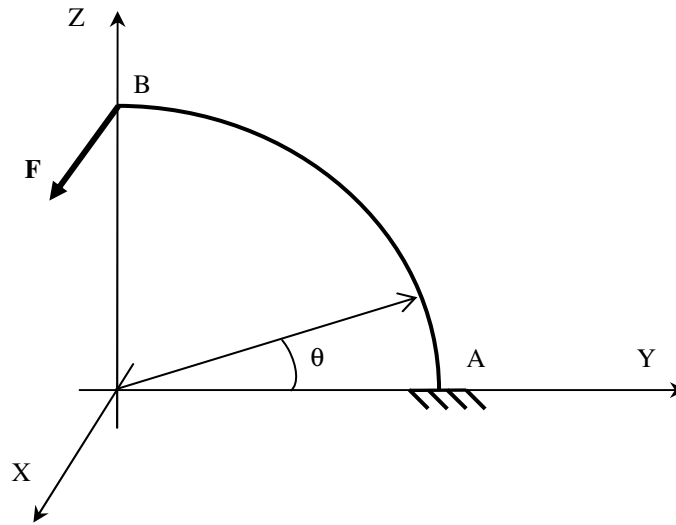
Données supplémentaires :

$$S_1 = S_2 = 1000 S_0$$

$$\nu = 0.3$$

Grandeur physique Position	CM2 10 EFs, 30 DDLs	CM2 20 EFs, 60 DDLs	CM2 40 EFs, 120 DDLs	Référence
Déplacement $U_x(B)$	0.3776	0.3787	0.3790	0.3791
Déplacement $U_y(B)$	0.2418	0.2417	0.2417	0.2417
Rotation $\theta_z(B)$	0.1651	0.1653	0.1654	0.1654

SSLL07 – Arc mince encastré en flexion hors plan



Modèle 3D poutre : $U_x, U_y, U_z, R_x, R_y, R_z$

Données fournies :

$$R = 1$$

$$I_{11} = I_{22} = 4.637E-9$$

$$E = 2^{E11}$$

$$\nu = 0.3$$

$$S_0 = 1.131 E-4$$

$$F = 100$$

Données supplémentaires :

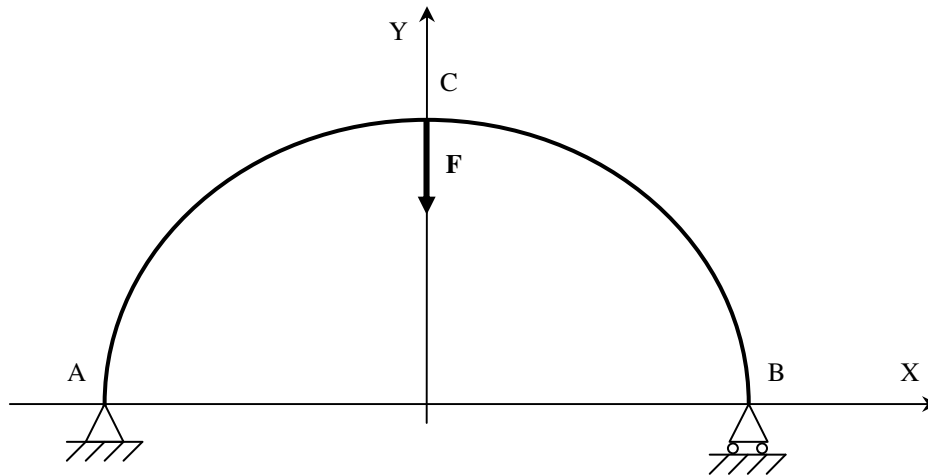
$$S_1 = S_2 = 1000 S_0$$

Grandeur physique Position	CM2 12 EFs, 72 DDLs	CM2 24 EFs, 144 DDLs	CM2 48 EFs, 288 DDLs	Référence
Déplacement $U_x(B)$	0.13422	0.13452	0.13459	0.13462
Moment torsion $M_t (\theta = 15^\circ)$	73.9594	74.0784	74.1082	74.1180
Moment flexion $M_f (\theta = 15^\circ)$	96.3856	96.5408	96.5797	-96.5925

Remarques :

- 1 - En modélisant les arcs par des éléments de poutre droits, on obtient des moments discontinus. Les valeurs données dans le tableau sont des moyennes arithmétiques entre deux éléments adjacents.
- 2 - On a discrétisé de sorte que le point à 15° corresponde à un nœud du maillage.

SSLL08 – Arc mince bi-articulé en flexion plane



Modèle 2D poutre : U_x , U_y , R_z

Données fournies :

$$R = 1$$

$$I_{11} = I_{22} = 4.637E-9$$

$$E = 2^E 11$$

$$\nu = 0.3$$

$$S_0 = 1.131 E-4$$

$$F = 100$$

$$U_x(A) = U_y(A) = 0$$

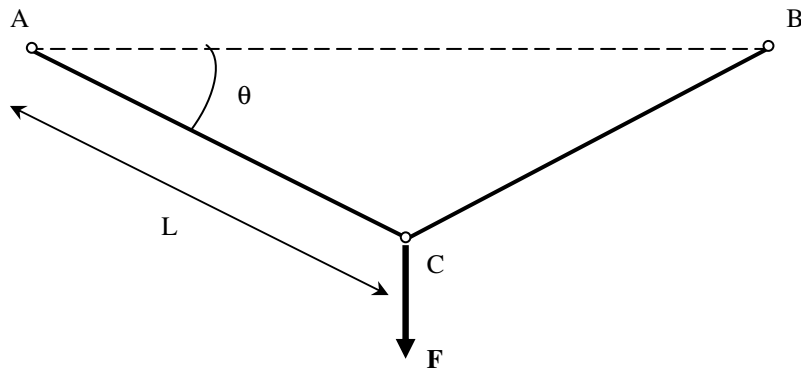
$$U_y(B) = 0$$

Données supplémentaires :

$$S_1 = S_2 = 1000 S_0$$

Grandeur physique Position	CM2 10 EFs, 30 DDLs	CM2 20 EFs, 60 DDLs	CM2 40 EFs, 120 DDLs	Référence
Rotation $\theta_z(A)$	-3.1090 E-2	-3.0853 E-2	-3.0779 E-2	-3.0774 E-2
Rotation $\theta_z(B)$	3.0677 E-2	3.0801 E-2	3.0794 E-2	3.0774 E-2
Déplacement $U_y(C)$	-1.9323 E-2	-1.9234 E-2	-1.9213 E-2	-1.9206 E-2
Déplacement $U_x(B)$	5.3693 E-2	5.3857 E-2	5.3898 E-2	5.3912 E-2

SSLL09 – Système de deux barres à trois rotules



Modèle 2D barre : U_x , U_y

Données fournies :

$$L = 4.5$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$E = 2.1 \text{ E}11$$

$$S_0 = 3 \text{ E-}4$$

$$U_x(A) = U_y(A) = 0$$

$$U_x(B) = U_y(B) = 0$$

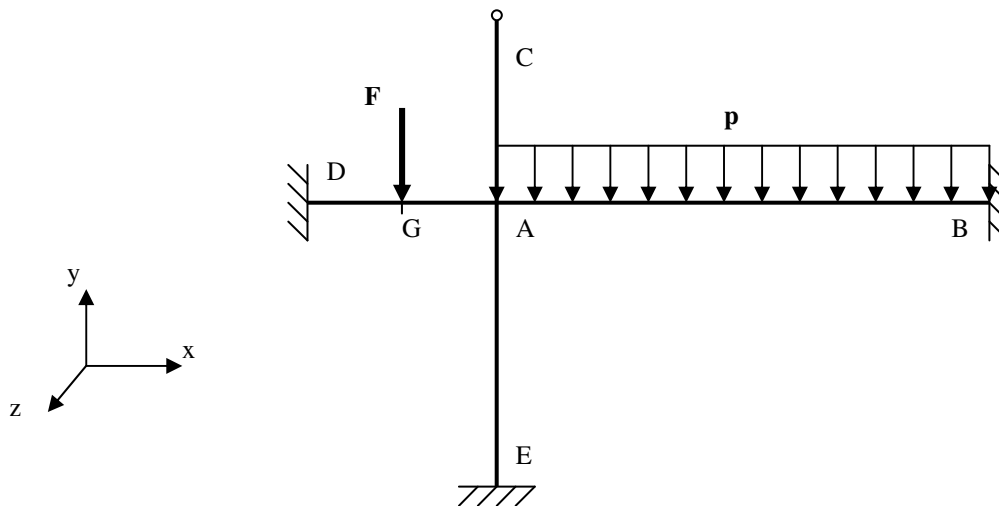
$$F = -21000$$

Grandeur physique Position	CM2 2 EFs, 2 DDLs	Référence
Déplacement $U_y(C)$	-3 E-3	-3 E-3
Contrainte σ (AC)	7 E7	7 E7
Contrainte σ (BC)	7 E7	7 E7

Remarques :

1 - CM2 ne donne pas directement les contraintes mais les résultantes. On a obtenu $F = 21000$.

SSLL10 – Portique à liaisons latérales



Modèle 2D poutre : U_x, U_y, R_z

Données fournies :

$$\begin{array}{lll} L_{AB} = 4 & I_{AB} = (64/3) E-8 & S_{AB} = 16 E-4 \\ L_{AC} = 1 & I_{AC} = (1/12) E-8 & S_{AC} = 1 E-4 \\ L_{AD} = 1 & I_{AD} = (1/12) E-8 & S_{AD} = 1 E-4 \\ L_{AE} = 2 & I_{AE} = (4/3) E-8 & S_{AE} = 4 E-4 \end{array}$$

$$E = 2 E11$$

$$F = -1 E5$$

$$p = -1 E3$$

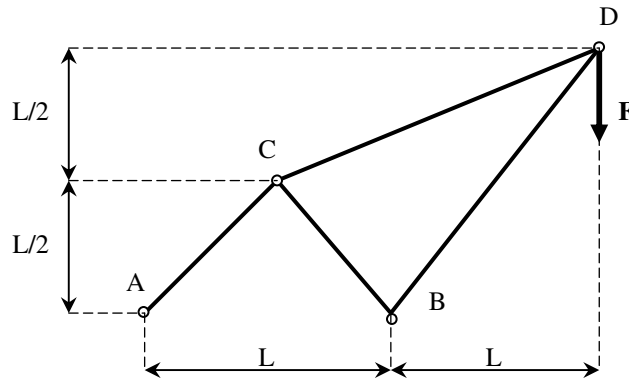
Données supplémentaires :

$$\nu = 0.3$$

$$S_1 = S_2 = 1000 S_0$$

Grandeur physique Position	CM2 4 EFs, 4 DDLs	Référence
Rotation $\theta_z(A)$	0.227401	0.227118
Moment $M_z(A)$ AB	-11021.00	11023.72
Moment $M_z(A)$ AC	-113.704	113.559
Moment $M_z(A)$ AD	12347.50	-12348.588
Moment $M_z(A)$ AE	-1212.77	1211.2994

SSLL11 – Treillis de barres articulées sous une charge ponctuelle



Modèle 2D barre : U_x , U_y

Données fournies :

$$L = 1$$

$$S_{AC} = 2 \text{ E-4}$$

$$S_{CB} = 2 \text{ E-4}$$

$$S_{CD} = 1 \text{ E-4}$$

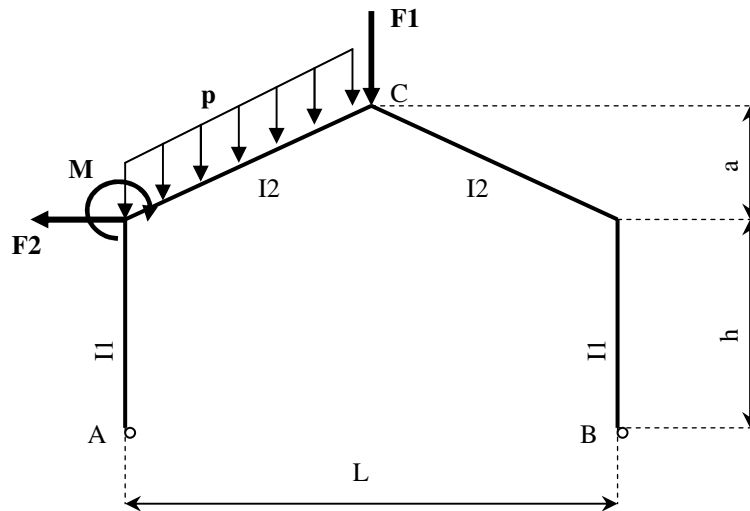
$$S_{BD} = 1 \text{ E-4}$$

$$E = 1.962 \text{ E11}$$

$$F = -9810$$

Grandeur physique Position	CM2 4 EFs, 4 DDLs	Référence
Déplacement $U_x(C)$	0.26516 E-3	0.26517 E-3
Déplacement $U_y(C)$	0.08839 E-3	0.08839 E-3
Déplacement $U_x(D)$	3.47903 E-3	3.47902 E-3
Déplacement $U_y(D)$	-5.60035 E-3	-5.60084 E-3

SSLL14 – Portique plan articulé en pied



Modèle 2D poutre : U_x, U_y, R_z

Données fournies :

$L = 20$
 $a = 4$
 $h = 8$
 $I_1 = 5 \text{ E-}4$
 $I_2 = 2.5 \text{ E-}4$
 $E = 2.1 \text{ E}11$
 $p = -3000$
 $F1 = -20000$
 $F2 = -10000$
 $M = -100000$

Données supplémentaires :

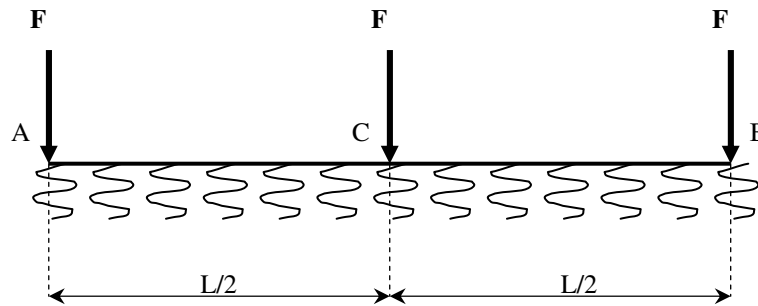
$\nu = 0.3$
 $S_0 = 1$
 $S_1 = S_2 = 1000 S_0$

Grandeur physique Position	CM2 4 EFs, 4 DDLs	Référence
Réaction $R_y(A)$	31500	31500
Réaction $R_x(A)$	20.239.4	20.239.4
Déplacement $U_y(C)$	-0.03072	-0.03072

Remarques :

1 - Pour obtenir les valeurs de référence, on a pris $p = -2785.43$, ce qui correspond à un poids vertical de 3000 par unité de longueur projetée.

SSLL15 – Poutre sur sol élastique, extrémités libres



Modèle 2D poutre : U_x , U_y , R_z

Données fournies :

$$L = 4.967294$$

$$I = 1 \text{ E-}4$$

$$E = 2.1 \text{ E}11$$

$$K = 840 \text{ E}3$$

$$F = -10000$$

Données supplémentaires :

$$\nu = 0.3$$

$$S_0 = 1$$

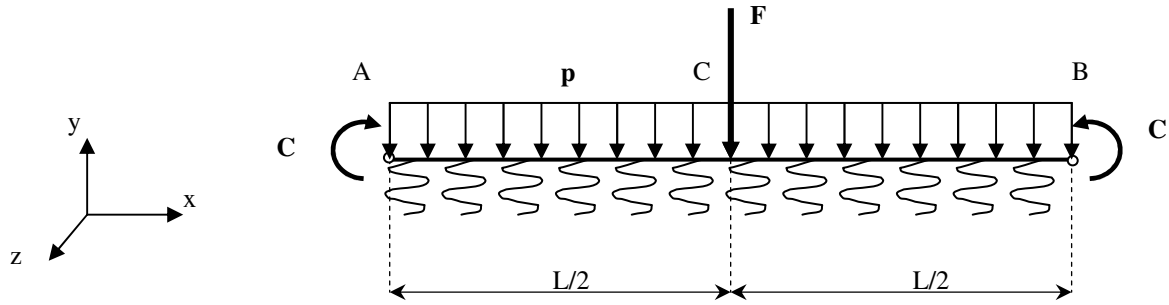
$$S_1 = S_2 = 1000 S_0$$

Grandeur physique Position	CM2 10 EFs, 32 DDLs	CM2 20 EFs, 62 DDLs	CM2 40 EFs, 122 DDLs	Référence
Moment $M_z(C)$	-5768.2	-5761.1	-5759.3	5759
Déplacement $U_y(C)$	-6.843 E-3	-6.843 E-3	-6.843 E-3	-6.844 E-3
Déplacement $U_y(A)$	-7.842 E-3	-7.855 E-3	-7.858 E-3	-7.854 E-3
Rotation $\theta_z(A)$	0.6919 E-3	0.7025 E-3	0.7051 E-3	0.706 E-3

Remarques :

1- On a stabilisé le problème en bloquant $U_x(A)$.

SSLL16 – Poutre sur sol élastique, extrémités articulées



Modèle 2D poutre : U_x , U_y , R_z

Données fournies :

$$L = 4.967294$$

$$I = 1 \text{ E-4}$$

$$E = 2.1 \text{ E11}$$

$$K = 840 \text{ E3}$$

$$F = -10000$$

$$p = -5000$$

$$C = 15000$$

Données supplémentaires :

$$\nu = 0.3$$

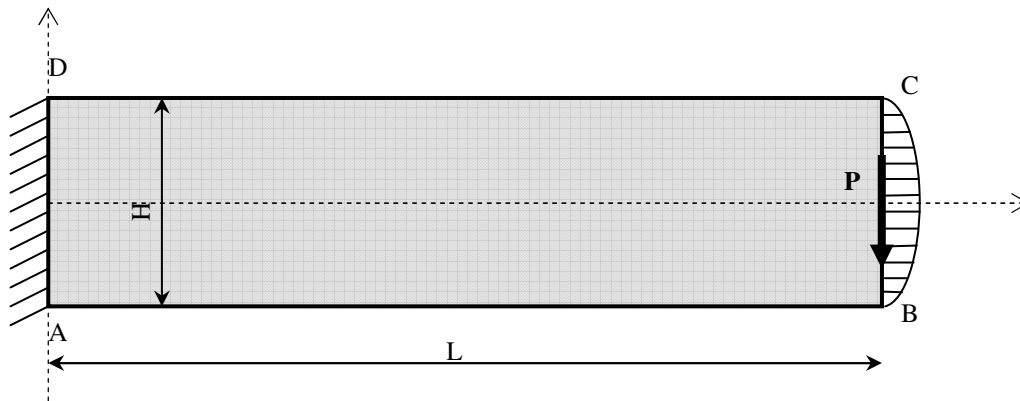
$$S_0 = 1$$

$$S_1 = S_2 = 1000 S_0$$

Grandeur physique Position	CM2 10 EFs, 29 DDLs	CM2 20 EFs, 59 DDLs	CM2 40 EFs, 123 DDLs	Référence
Rotation $\theta_z(A)$	-3.054 E-3	-3.047 E-3	-3.045 E-3	-3.045 E-3
Réaction $R_y(A)$	11708	11683	11676	11674
Déplacement $U_y(C)$	-4.2473 E-3	-4.2368 E-3	-4.2342 E-3	-4.23326 E-3
Moment $M_z(C)$	33883	33851	33843	-33840

MODELES MEMBRANES

SSLP01 – Plaque en flexion et cisaillement dans son plan



Modèle 2D membrane : U_x, U_y

Données fournies :

$$L = 48 \text{ E-3}$$

$$H = 12 \text{ E-3}$$

$$h = 1 \text{ E-3}$$

$$E = 3 \text{ E10}$$

$$\nu = 0.25$$

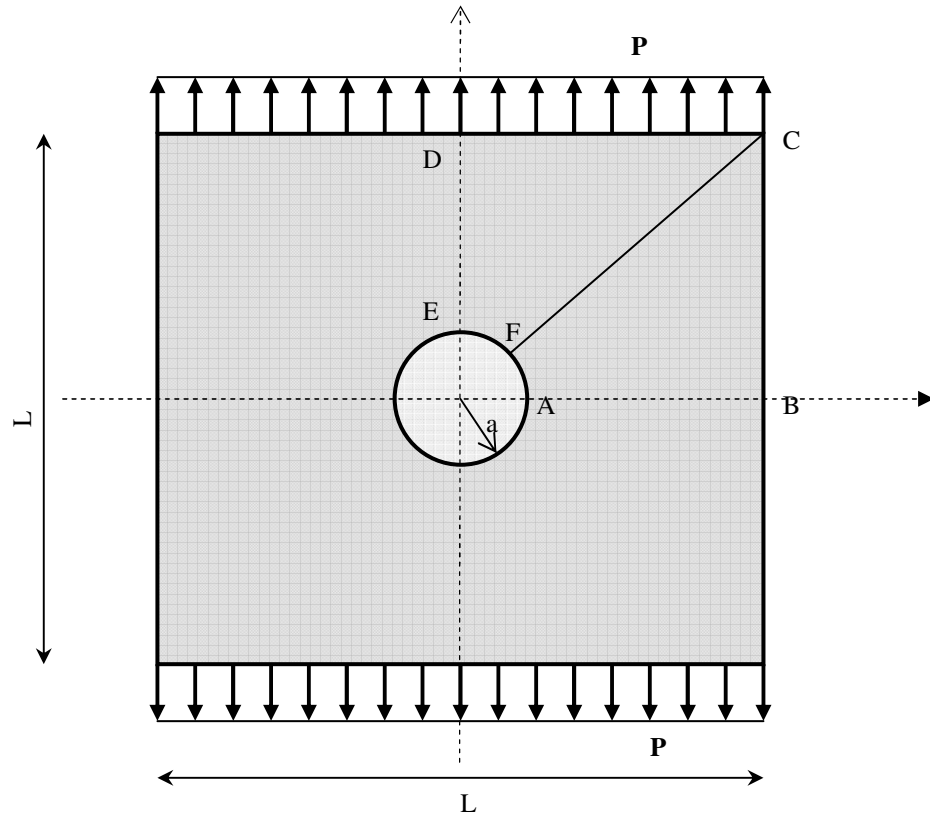
$$P = 5000 (1 - (2y/H)^2) \Rightarrow \text{résultante } R = 40$$

Grandeur physique Position	CM2 4x16	CM2 8x32	CM2 16x64	Référence
Déplacement $U_y(B)$	-3.231 E-4	-3.475 E-4	-3.538 E-4	-3.573 E-4
Contrainte $\sigma_{xx}(A)$	-76.18 E6 -77.68 E6	-87.65 E6 -90.02 E6	-97.51 E6 -101.14 E6	-80 E6
Contrainte $\sigma_{xx}(D)$	+76.18 E6 +77.68 E6	+87.65 E6 +90.02 E6	+97.51 E6 +101.14 E6	+80 E6
Contrainte $\sigma_{xy}(L,0)$	-4.848 E6	-4.948 E6	-4.988 E6	-5 E6
DDLs / Temps	160 / 0.23 s	576 / 0.47 s	2176 / 1.58 s	

Remarques :

- 1- On a maillé avec des Q4 réguliers.
- 2- Le chargement a été modélisé par des charges élémentaires trapèzes.
- 3- Pour $U_y(L)$ deux valeurs de référence sont données : -3.413 E-4, qui correspond à la solution poutre élastique, et -3.573 E-4 que nous prenons comme référence pour la plaque.
- 4- Les contraintes σ_{xx} données en référence sont les contraintes pour une poutre élastique, alors qu'il est bien connu que pour le modèle 2D, les contraintes en A et D sont singulières. Le calcul montre d'ailleurs que ces contraintes ne convergent pas.
- 5- Les contraintes CM2 σ_{xx} sont données brutes (interpolation aux nœuds) et lissées (moindres carrées). La contrainte σ_{xy} est donnée lissée.
- 6- Les temps de calcul incluent le lissage des contraintes.

SSLP02 – Traction simple d'une plaque perforée

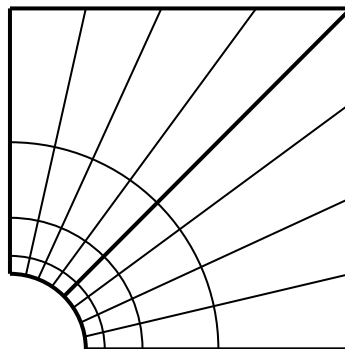


Modèle 2D membrane : U_x, U_y

Données fournies :

$L = 0.1$
 $a = 0.01$
 $h = 1 \text{ E-}3$
 $E = 3 \text{ E}10$
 $\nu = 0.25$
 $P = 2500$

En utilisant les symétries du problème, on a maillé 2 secteurs de $1/8$ de la plaque, chaque côté étant discrétisé en N éléments. On a également utilisé une progression géométrique ($\rho = 4$). Par exemple pour $N = 4$:



Maillage Q4 réglé

Grandeur physique Position	CM2 N = 10	CM2 N = 20	CM2 N = 40	Référence
Contrainte $\sigma_{\theta\theta}(a,0)$	8.344 E6	8.391 E6	8.401 E6	7.5 E6
Contrainte $\sigma_{\theta\theta}(a,\pi/4)$	2.586 E6	2.598 E6	2.600 E6	2.5 E6
Contrainte $\sigma_{\theta\theta}(a,\pi/2)$	-3.166 E6	-3.211 E6	-3.223 E6	-2.5 E6
DDLs / Temps	440 / 0.45 s	1680 / 1.35 s	6560 / 5.59 s	

Maillage Q4 Delaunay

Grandeur physique Position	CM2 N = 10	CM2 N = 20	CM2 N = 40	Référence
Contrainte $\sigma_{\theta\theta}(a,0)$	8.264 E6	8.378 E6	8.416 E6	7.5 E6
Contrainte $\sigma_{\theta\theta}(a,\pi/4)$	2.505 E6	2.546 E6	2.252 E6	2.5 E6
Contrainte $\sigma_{\theta\theta}(a,\pi/2)$	-3.247 E6	-3.360 E6	-3.293 E6	-2.5 E6
DDLs / Temps	464 / 0.41 s	1572 / 1.17 s	5140 / 3.95 s	

Maillage T3 Delaunay

Grandeur physique Position	CM2 N = 10	CM2 N = 20	CM2 N = 40	Référence
Contrainte $\sigma_{\theta\theta}(a,0)$	8.091 E6	8.312 E6	8.358 E6	7.5 E6
Contrainte $\sigma_{\theta\theta}(a,\pi/4)$	2.545 E6	2.589 E6	2.601 E6	2.5 E6
Contrainte $\sigma_{\theta\theta}(a,\pi/2)$	-3.048 E6	-3.158 E6	3.193 E6	-2.5 E6
DDLs / Temps	390 / 0.34 s	1428 / 0.94 s	5438 / 3.77 s	

Remarques :

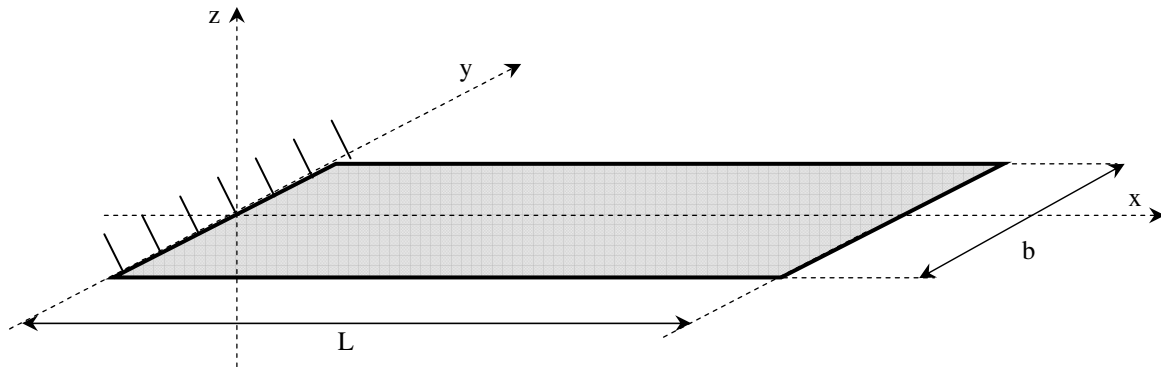
- 1- La solution donnée en référence suppose une plaque infinie, ce qui est loin d'être le cas.
- 2- Avec $L = 1000 \text{ E-3}$ ($\Rightarrow a/L = 0.02$). On trouve alors :

Grandeur physique Position	CM2 N = 40
Contrainte $\sigma_{\theta\theta}(a,0)$	7.53 E6
Contrainte $\sigma_{\theta\theta}(a,\pi/4)$	2.508 E6
Contrainte $\sigma_{\theta\theta}(a,\pi/2)$	-2.498 E6
DDLs / Temps	6560 / 7.53 s

- 3- Les contraintes sont toujours lissées aux nœuds.

MODELES PLAQUES & COQUES

SSLS01 – Plaque rectangulaire en porte-à-faux



Modèle plaque : U_z , R_x , R_y

Données fournies :

$$L = 1$$

$$b = 0.1$$

$$h = 5 \text{ E-}3$$

$$E = 2.1 \text{ E}11$$

$$\nu = 0.3$$

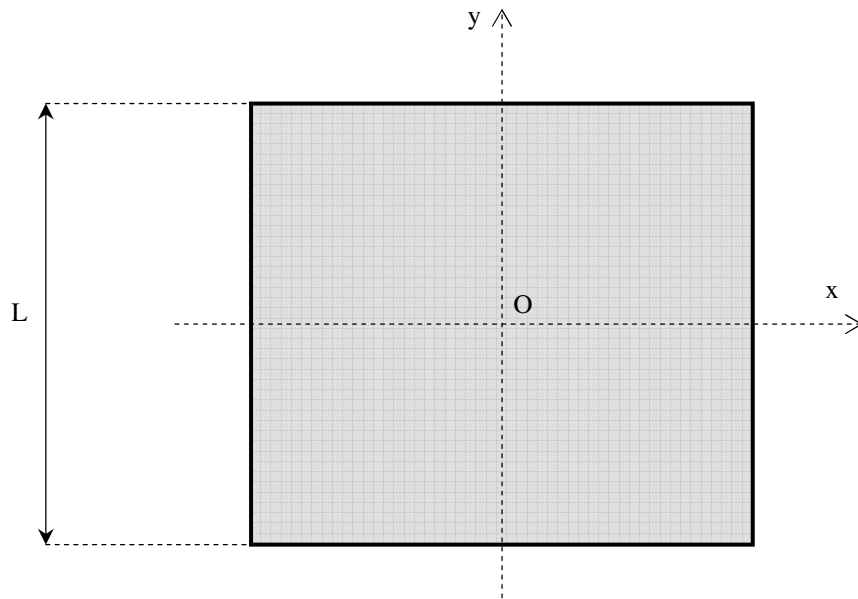
$$P_z = -1700 \text{ (charge uniforme)}$$

Grandeur physique Position	CM2 4x10	CM2 4x20	CM2 4x40	Référence
Déplacement $U_z(L)$	-9.541 E-2	-9.570 E-2	-9.580 E-2	-9.73 E-2
DDLs / Temps	150 / 0.21 s	300 / 0.26 s	600 / 0.36 s	

Remarques :

- 1- La valeur donnée en référence est la flèche de poutre élancée et ne correspond pas à la flèche de plaque si $\nu \neq 0$

SSLS02 – Plaque carrée simplement appuyée



Modèle plaque : U_z , R_x , R_y

Données fournies :

$$L = 1$$

$$h = 0.01$$

$$E = 2.1 \text{ E}11$$

$$\nu = 0.3$$

$$P_z = -779.895 \text{ (charge uniforme)}$$

$$\text{Appui simple type SS2 sur tout le pourtour : } U_z = R_n = 0$$

Maillage Q4

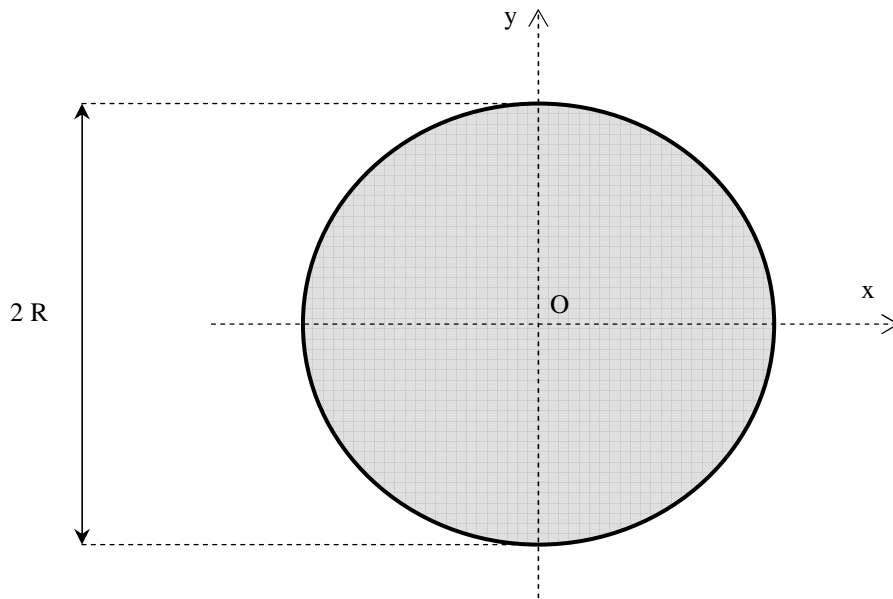
Grandeur physique Position	CM2 10x10	CM2 20x20	CM2 40x40	Référence
Déplacement $U_z(O)$	-1.647 E-4	-1.648 E-4	-1.648 E-4	-1.58 E-4
DDLs / Temps	300 / 0.27 s	1200 / 0.74 s	4800 / 3.29 s	

Remarques :

1- On a maillé $\frac{1}{4}$ de la plaque avec des Q4 réguliers.

2- La valeur de référence est fautive. La série trigonométrique (modèle KL) converge vers $1.6452 \text{ E-}4$.

SSLS03 – Plaque circulaire sous charge uniforme



Modèle plaque : U_z , R_x , R_y

Données fournies :

$$R = 1$$

$$h = 5 \text{ E-}3$$

$$E = 2.1 \text{ E}11$$

$$\nu = 0.3$$

$$P_z = -1000 \text{ (charge uniforme)}$$

Encastrement sur tout le pourtour

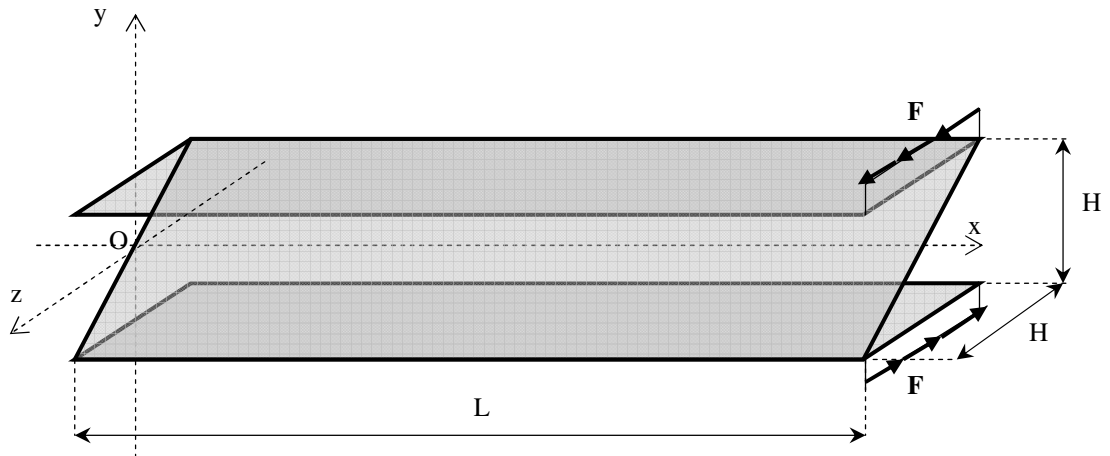
Maillage Q4 Delaunay

Grandeur physique Position	CM2 20	CM2 40	CM2 80	Référence
Déplacement $U_z(O)$	-5.957 E-2	-6.436 E-2	-6.481 E-2	-6.5 E-2
DDLs / Temps	93 / 0.14 s	357 / 0.33 s	1683 / 1.33 s	

Remarques :

- 1- On a maillé toute la plaque avec des Q4 libres (Delaunay) sans utiliser les symétries du problème. N est le nombre d'éléments total sur le contour.

SSLS04 – Poutre à section en Z



Modèle coque : $U_x, U_y, U_z, R_x, R_y, R_z$

Données fournies :

$$h = 0.01$$

$$L = 10$$

$$H = 1$$

$$E = 2.1 \text{ E}11$$

$$\nu = 0.3$$

$$F = 10000$$

Encastrement en $x = 0$

Point A($L, H/2, H/2$)

Point B($L/2, H/2, 0$)

Point C ($L/2, 0, 0$)

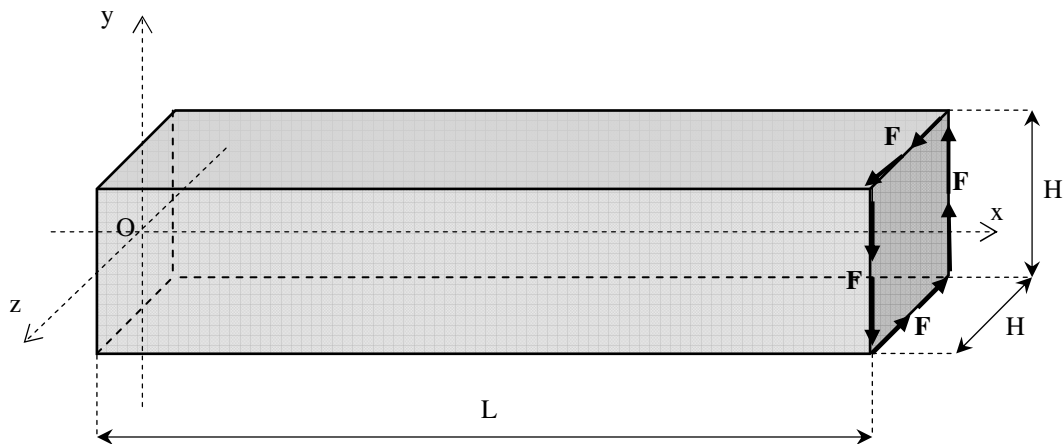
Grandeur physique Position	CM2 2x10	CM2 4x20	CM2 8x40	Référence
Déplacement $U_z(A)$	7.157 E-3	8.105 E-3	8.389 E-3	7.15 E-3
Contrainte $\sigma_{xz}(B)$	0.8635 E6	1.179 E6	1.191 E6	1.86 E6
Contrainte $\sigma_{xx}(C)$	6.516 E6	7.358 E6	7.603 E6	6.52 E6
DDLs / Temps	420 / 0.34 s	1560 / 1.10 s	6000 / 5.63 s	

Remarques :

1- On a maillé chaque plaque avec des Q4 réguliers 2x10, 2x20 ou 8x40.

2- Les valeurs de référence ne sont pas retrouvées. Il semble que ces valeurs soient données pour un maillage grossier 2x10 (à part la contrainte $\sigma_{xz}(B)$)...

SSLS05 – Poutre caisson en torsion



Modèle coque : $U_x, U_y, U_z, R_x, R_y, R_z$

Données fournies :

$$h = 0.005$$

$$L = 1$$

$$H = 0.1$$

$$E = 2.1 \text{ E11}$$

$$\nu = 0.3$$

Encastrement en $x = 0$

Couple en $x = L$: $F = 500$ ($\Rightarrow C = 10$)

Point A(5, 0, 0.05)

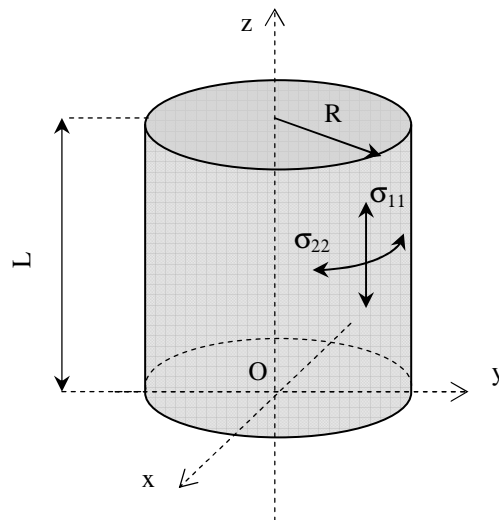
Point B(0.8, -0.05, 0)

Grandeur physique Position	CM2 2x10	CM2 4x20	CM2 8x40	Référence
Déplacement $U_y(A)$	-6.159 E-7	-6.164 E-7	-6.166 E-7	-6.17 E-7
Rotation $\theta_x(A)$	1.232 E-5	1.233 E-5	1.233 E-5	1.23 E-5
Contrainte $\sigma_{xy}(A)$	-0.9953 E5	-0.9970 E5	-0.9967 E5	-1.1 E5
Déplacement $U_z(B)$	-9.865 E-7	-9.866 E-7	-9.868 E-7	-9.87 E-7
Rotation $\theta_x(B)$	1.972 E-5	1.973 E-5	1.973 E-5	1.97 E-5
Contrainte $\sigma_{xz}(B)$	-0.9978 E5	-0.9967 E5	-0.9967 E5	-1.1 E6
DDLs / Temps	480 / 0.31 s	1920 / 1.48 s	7680 / 8.80 s	

Remarques :

- 1- On a maillé chaque plaque avec des Q4 réguliers 2x10, 4x20 ou 8x40.
- 2- En référence, est donnée la valeur de la contrainte $\sigma_{xy}(B)$ alors qu'il nous semble que c'est plutôt la contrainte $\sigma_{xz}(B)$ (cisaillement plan, comme au point A).
- 3- Cette contrainte de cisaillement plan n'est pas retrouvée par le calcul (10 % de différence).
- 4- Le caisson n'est pas fermé en $x = L$ (mais ça ne change pas grand-chose).

SSLS06 – Cylindre mince sous pression radiale uniforme



Modèle coque : $U_x, U_y, U_z, R_x, R_y, R_z$

Données fournies :

$$h = 0.02$$

$$R = 1$$

$$L = 4$$

$$E = 2.1 \text{ E}11$$

$$\nu = 0.3$$

Conditions libres

$$\text{Pression interne } p = 1 \text{ E}4$$

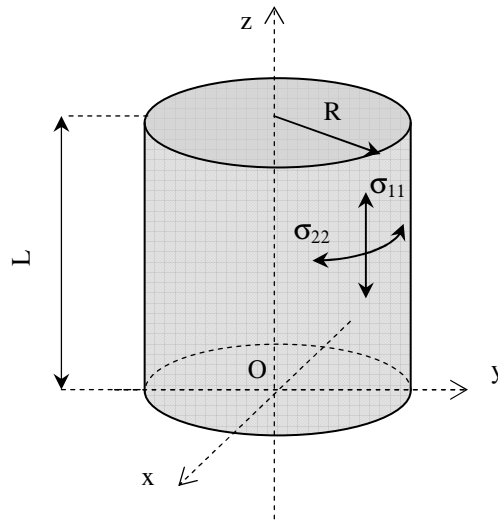
Grandeur physique Position	CM2 10x10	CM2 10x20	CM2 10x40	Référence
Contrainte σ_{11}	0	0	0	0
Contrainte σ_{22}	4.995 E5	4.999 E5	5.000 E5	5.000 E5
δR	2.374 E-6	2.379 E-6	2.380 E-6	2.38 E-6
δL	-2.848 E-6	-2.855 E-6	-2.857 E-6	-2.86 E-6
DDLs / Temps	649 / 0.53 s	1299 / 0.98 s	2599 / 1.85 s	

Remarques :

1- On a maillé $\frac{1}{4}$ du cylindre avec des Q4 réguliers. On aurait pu ne mailler qu' $\frac{1}{8}$ ème.

2- On a imposé les conditions de symétrie et $U_z (z=0) = 0$

SSLS07 – Cylindre mince sous charge axiale uniforme



Modèle coque : $U_x, U_y, U_z, R_x, R_y, R_z$

Données fournies :

$$h = 0.02$$

$$R = 1$$

$$L = 4$$

$$E = 2.1 \text{ E}11$$

$$\nu = 0.3$$

$$U_z(z=0) = 0$$

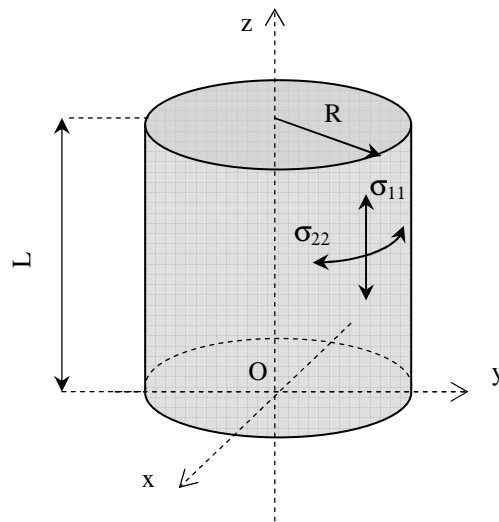
Force axiale en $z = L$: $F = 1 \text{ E}4$ / unité longueur

Grandeur physique Position	CM2 10x10	CM2 10x20	Référence
Contrainte σ_{11}	5.000 E5	5.000 E5	5.000 E5
Contrainte σ_{22}	0	0	0
δR	9.524 E-6	9.524 E-6	9.52 E-6
δL	-7.143 E-7	-7.143 E-7	-7.14 E-7
DDLs / Temps	649 / 0.53 s	1299 / 1.00 s	

Remarques :

1- On a maillé $\frac{1}{4}$ du cylindre avec des Q4 réguliers.

SSLS08 – Cylindre mince sous pression hydrostatique



Modèle coque : $U_x, U_y, U_z, R_x, R_y, R_z$

Données fournies :

$$h = 0.02$$

$$R = 1$$

$$L = 4$$

$$E = 2.1 \text{ E}11$$

$$\nu = 0.3$$

Conditions libres

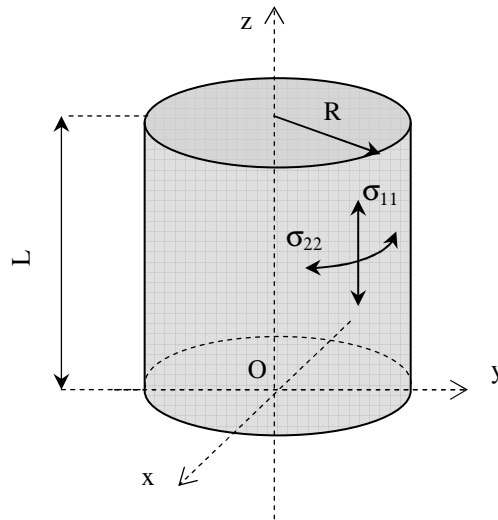
Pression radiale variant linéairement $P(z=L) = 0, P(z=0) = 2 \text{ E}4$

Grandeur physique Position	CM2 10x10	CM2 20x20	CM2 40x40	Référence
Contrainte σ_{11}	< 9000	< 4500	< 2500	0
Contrainte $\sigma_{22} (z=L/2)$	4.995 E5	4.999 E5	5.000 E5	5.000 E5
$\delta R (z=L/2)$	2.374 E-6	2.379 E-6	2.380 E-6	2.38 E-6
$\delta L (z=L)$	-2.848 E-6	-2.855 E-6	-2.857 E-6	-2.86 E-6
$\theta (z=0)$	1.072 E-6	1.126 E-6	1.168 E-6	1.19 E-6
DDLs / Temps	649 / 0.53 s	2499 / 2.20 s	9799 / 16.35 s	

Remarques :

- 1- On a maillé $\frac{1}{4}$ du cylindre avec des Q4 réguliers.
- 2- On a utilisé des chargements élémentaires trapézoïdaux (1 valeur à chaque sommet des éléments).
- 3- Pour obtenir une bonne valeur de $\theta (z=0)$, il convient de mailler assez fin dans le sens axial.

SSLS09 – Cylindre mince sous son poids propre



Modèle coque : $U_x, U_y, U_z, R_x, R_y, R_z$

Données fournies :

$$h = 0.02$$

$$R = 1$$

$$L = 4$$

$$E = 2.1 \text{ E}11$$

$$\nu = 0.3$$

$$U_z(z=0) = 0$$

$$\text{Force } F_z = -1570 / \text{unité de surface}$$

Grandeur physique Position	CM2 10x10	CM2 20x20	CM2 40x40	Référence
Contrainte σ_{22}	< 50	< 300	< 400	0
Contrainte $\sigma_{11}(z=L)$	3.04 E5	3.09 E5	3.12 E5	3.14 E5
$\delta L(z=L)$	-2.990 E-6	-2.990 E-6	-2.990 E-6	2.99 E-6
$\delta R(z=0)$	4.352 E-7	4.430 E-7	4.468 E-7	-4.49 E-7
$\theta(z=0)$	0.325 E-7	0.686 E-7	0.967 E-7	1.12 E-7
DDLs / Temps	649 / 0.53 s	2499 / 2.18 s	9799 / 16.35 s	

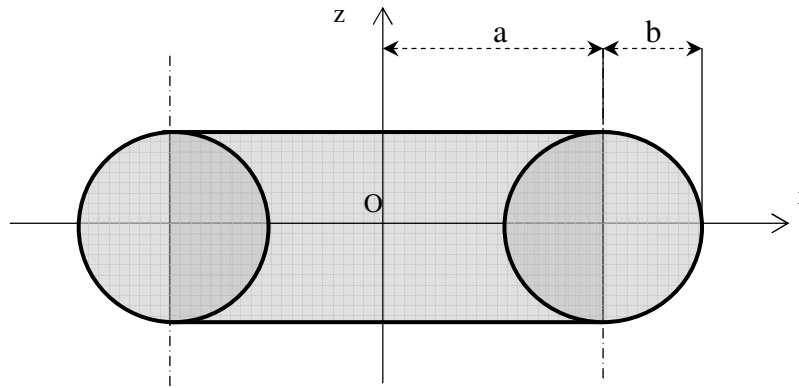
Remarques :

1- On a maillé $\frac{1}{4}$ du cylindre avec des Q4 réguliers.

2- Pour obtenir une bonne valeur de $\theta(z=0)$, il convient de mailler fin dans le sens axial.

3- Le signe de $\delta R(z=0)$ ne correspond pas à la valeur de référence. Un signe positif semble plus réaliste...

SSLS10 – Tore sous pression interne uniforme



Modèle coque : $U_x, U_y, U_z, R_x, R_y, R_z$

Données fournies :

$$h = 0.02$$

$$a = 2$$

$$b = 1$$

$$E = 2.1 \text{ E}11$$

$$\nu = 0.3$$

Pression $p = 1 \text{ E}4$ / unité de surface

Conditions libres

Données supplémentaires :

point E1 ($a+b, 0, 0$)

point E2 ($a, 0, b$)

point E3 ($a-b, 0, 0$)

point N1 ($0, a+b, 0$)

point N2 ($0, a, b$)

point N3 ($0, a-b, 0$)

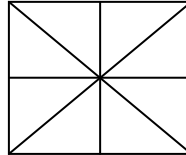
Maillage Q4 régulier

Grandeur physique Position	CM2 10x10	CM2 20x20	CM2 40x40	Référence
$\sigma_{22}(E1) = \sigma_{yy}(E1)$	2.450 E5	2.481 E5	2.490 E5	2.50 E5
$\sigma_{22}(E2) = \sigma_{yy}(E2)$	2.689 E5	2.670 E5	2.665 E5	2.50 E5
$\sigma_{22}(E3) = \sigma_{yy}(E3)$	2.338 E5	2.438 E5	2.476 E5	2.50 E5
$\sigma_{11}(E1) = \sigma_{zz}(E1)$	4.158 E5	4.167 E5	4.169 E5	4.17 E5
$\sigma_{11}(E3) = \sigma_{zz}(E3)$	7.356 E5	7.452 E5	7.482 E5	7.50 E5
$U_x(E1)$	1.725 E-6	1.761 E-6	1.770 E-6	1.79 E-6
$U_x(E3)$	-0.327 E-7	-0.144 E-7	0.820 E-7	1.19 E-7
DDLs / Temps	598 / 0.56 s	2398 / 2.14 s	9598 / 16.13 s	

Maillage T3 régulier UJ

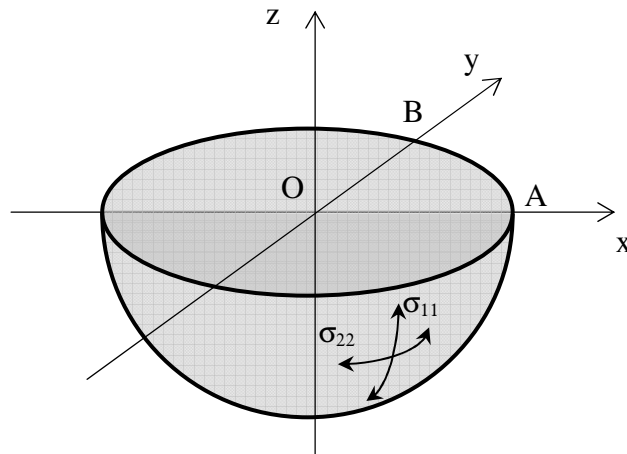
Grandeur physique Position	CM2 10x10	CM2 20x20	CM2 40x40	Référence
$\sigma_{22}(E1) = \sigma_{yy}(E1)$	2.454 E5	2.475 E5	2.487 E5	2.50 E5
$\sigma_{22}(E2) = \sigma_{yy}(E2)$	2.445 E5	2.629 E5	2.654 E5	2.50 E5
$\sigma_{22}(E3) = \sigma_{yy}(E3)$	2.259 E5	2.486 E5	2.489 E5	2.50 E5
$\sigma_{11}(E1) = \sigma_{zz}(E1)$	4.165 E5	4.176 E5	4.171 E5	4.17 E5
$\sigma_{11}(E3) = \sigma_{zz}(E3)$	7.250 E5	7.513 E5	7.497 E5	7.50 E5
$U_x(E1)$	1.789 E-6	1.771 E-6	1.772 E-6	1.79 E-6
$U_x(E3)$	-0.209 E-7	0.758 E-7	1.051 E-7	1.19 E-7
DDLs / Temps	598 / 0.51 s	2398 / 1.61 s	9598 / 7.44 s	

Motif de base du maillage UJ (Union Jack) :

**Remarques :**

- 1- On a maillé 1/8 du tore et appliqué les conditions de symétrie adéquates. Ce 1/8ème de tore a été divisé en 2 surfaces (E1, N1, N2, E2) et (E2, N2, N3, E3) maillée chacune en 5x10, 10x20 ou 20x40, ce qui donne des maillages complets de 10x10, 20x20 et 40x40.
- 2- Les forces de pression ont été modélisées par des forces uniformes par élément, de direction donnée par la normale au tore au centre de gravité de chaque élément.
- 3- La géométrie doit être suivie très finement pour obtenir des résultats convergés, notamment pour modéliser correctement les forces de pression radiales. Pour ce cas test, l'élément triangle se comporte légèrement mieux que le quadrangle.
- 5- Comme d'habitude, les temps de calcul incluent le lissage des contraintes (moindres carrées).

SSLS14 – Calotte sphérique sous pression interne (hémisphère)



Modèle coque : $U_x, U_y, U_z, R_x, R_y, R_z$

Données fournies :

$$h = 0.02$$

$$R = 1$$

$$E = 2.1 \text{ E}11$$

$$\nu = 0.3$$

$$\text{Pression } p = 1 \text{ E}4 / \text{unité de surface}$$

$$U_z(z=0) = 0$$

Données supplémentaires :

$$\text{point A } (R, 0, 0) \quad \text{point B } (0, R, 0)$$

Maillage Q4 Delaunay

Grandeur physique Position	CM2 10x16	CM2 20x32	CM2 40x64	Référence
$\sigma_{11}(A) = \sigma_{zz}(A)$	2.503 E5	2.512 E5	2.503 E5	2.50 E5
$\sigma_{22}(A) = \sigma_{yy}(A)$	2.528 E5	2.513 E5	2.515 E5	2.50 E5
$\sigma_{11}(B) = \sigma_{zz}(B)$	2.528 E5	2.513 E5	2.503 E5	2.50 E5
$\sigma_{22}(B) = \sigma_{xx}(B)$	2.527 E5	2.513 E5	2.514 E5	2.50 E5
$U_x(A)$	8.507 E-7	8.465 E-7	8.417 E-7	8.33 E-7
$U_y(B)$	8.588 E-7	8.475 E-7	8.417 E-7	8.33 E-7
DDLs / Temps	596 / 0.46 s	2236 / 1.72 s	8876 / 8.69 s	

Maillage T3 Delaunay

Grandeur physique Position	CM2 10x16	CM2 20x32	CM2 40x64	Référence
$\sigma_{11}(A) = \sigma_{zz}(A)$	2.490 E5	2.492 E5	2.504 E5	2.50 E5
$\sigma_{22}(A) = \sigma_{yy}(A)$	2.456 E5	2.482 E5	2.498 E5	2.50 E5
$\sigma_{11}(B) = \sigma_{zz}(B)$	2.490 E5	2.492 E5	2.504 E5	2.50 E5
$\sigma_{22}(B) = \sigma_{xx}(B)$	2.456 E5	2.482 E5	2.498 E5	2.50 E5
$U_x(A)$	8.068 E-7	8.252 E-7	8.350 E-7	8.33 E-7
$U_y(B)$	8.068 E-7	8.252 E-7	8.350 E-7	8.33 E-7
DDLs / Temps	626 / 0.40 s	2386 / 1.62 s	9458 / 8.87 s	

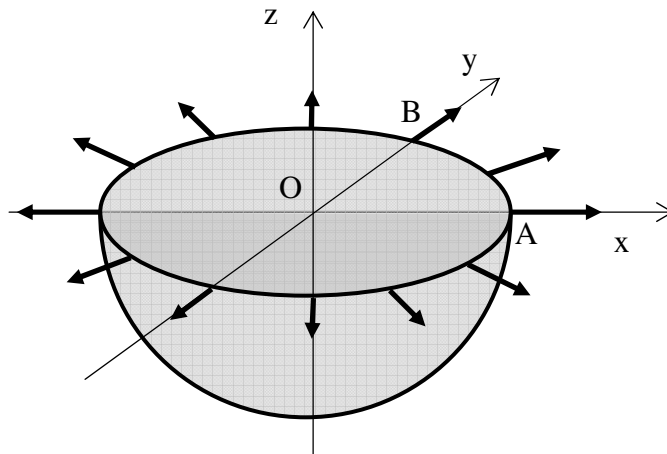
Remarques :

1- On a maillé $\frac{1}{4}$ de l'hémisphère et appliqué les conditions de symétrie adéquates. Les 3 lignes du bord de ce $\frac{1}{4}$ d'hémisphère ont été maillées avec N = 10, 20 puis 40 éléments.

On a d'abord maillé plan (10 sur les 2 lignes droites et 16 sur l'arc de cercle, puis 20 et 32, 40 et 64) puis projeté sur la sphère par dilatation (d'où une certaine distorsion des éléments).

2- Les forces de pression ont été modélisées par des forces uniformes par élément, de direction donnée par la normale à l'hémisphère au centre de gravité de chaque élément.

SSLS15 – Calotte sphérique soumise à force radiale (hémisphère)



Modèle coque : $U_x, U_y, U_z, R_x, R_y, R_z$

Données fournies :

$$h = 0.02$$

$$R = 1$$

$$E = 2.1 \text{ E}11$$

$$\nu = 0.3$$

Force $Q = 1000$ / unité de longueur

$$U_z(z=0) = 0$$

Données supplémentaires :

point A ($R, 0, 0$) point B ($0, R, 0$)

Maillage Q4 Delaunay

Grandeur physique Position	CM2 10x16	CM2 20x32	CM2 40x64	Référence
$\sigma_{11}(A) = \sigma_{zz}(A)$	0.741 E5	0.518 E5	0.295 E5	0.0
$\sigma_{22}(A) = \sigma_{yy}(A)$	7.050 E5	8.552 E5	9.004 E5	9.09 E5
$\sigma_{11}(B) = \sigma_{zz}(B)$	0.776 E5	0.519 E5	0.295 E5	0.0
$\sigma_{22}(B) = \sigma_{xx}(B)$	7.327 E5	8.549 E5	9.041 E5	9.09 E5
$U_x(A)$	3.288 E-6	4.016 E-6	4.267 E-6	4.33 E-6
$U_y(B)$	3.440 E-6	4.017 E-6	4.265 E-6	4.33 E-6
DDLs / Temps	596 / 0.44 s	2236 / 1.68 s	8876 / 8.65 s	

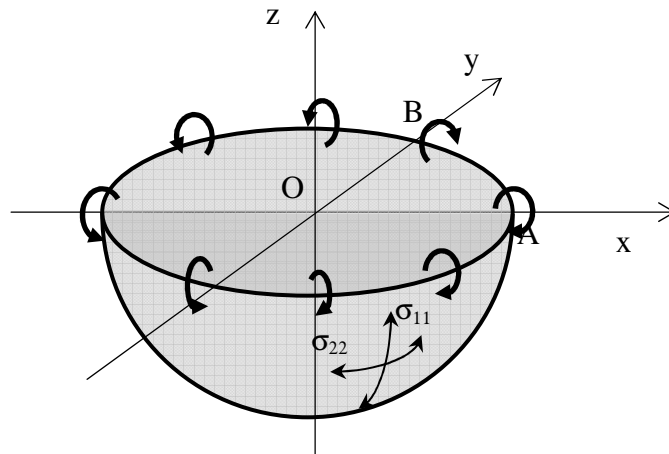
Maillage T3 Delaunay

Grandeur physique Position	CM2 10x16	CM2 20x32	CM2 40x64	Référence
$\sigma_{11}(A) = \sigma_{zz}(A)$	-0.215 E5	0.456 E5	0.129 E5	0.0
$\sigma_{22}(A) = \sigma_{yy}(A)$	4.22 E5	9.519 E5	8.715 E5	9.09 E5
$\sigma_{11}(B) = \sigma_{zz}(B)$	-0.215 E5	0.456 E5	0.129E5	0.0
$\sigma_{22}(B) = \sigma_{xx}(B)$	4.22 E5	9.519 E5	8.714 E5	9.09 E5
$U_x(A)$	3.002 E-6	3.858 E-6	4.229 E-6	4.33 E-6
$U_y(B)$	3.004 E-6	3.858 E-6	4.229 E-6	4.33 E-6
DDLs / Temps	626 / 0.40 s	2386 / 1.63 s	9458 / 8.72 s	

Remarques :

- 1- On a maillé comme précédemment et appliqué les mêmes conditions de symétrie.
- 2- Les forces ont été modélisées par des forces uniformes par arête, de direction donnée par la normale au cercle au centre de gravité de chaque arête.

SSLS16 – Calotte sphérique soumise à moment (hémisphère)



Modèle coque : $U_x, U_y, U_z, R_x, R_y, R_z$

Données fournies :

$$h = 0.02$$

$$R = 1$$

$$E = 2.1 \text{ E}11$$

$$\nu = 0.3$$

$$\text{Moment } M = 100 / \text{unité de longueur}$$

$$U_z (z=0) = 0$$

Données supplémentaires :

point A (R, 0, 0) point B (0, R, 0)

Maillage Q4 Delaunay

Grandeur physique Position	CM2 10x16	CM2 20x32	CM2 40x64	Référence
$\sigma_{22}(A) = \sigma_{yy}(A)$	5.863 E5	7.624 E5	8.157 E5	8.26 E5
$\sigma_{22}(B) = \sigma_{xx}(B)$	6.032 E5	7.619 E5	8.153 E5	8.26 E5
$U_x(A)$	2.690 E-6	3.521 E-6	3.817 E-6	3.93 E-6
$U_y(B)$	2.846 E-6	3.519 E-6	3.813 E-6	3.93 E-6
DDLs / Temps	596 / 0.43 s	2236 / 1.69 s	8876 / 8.63 s	

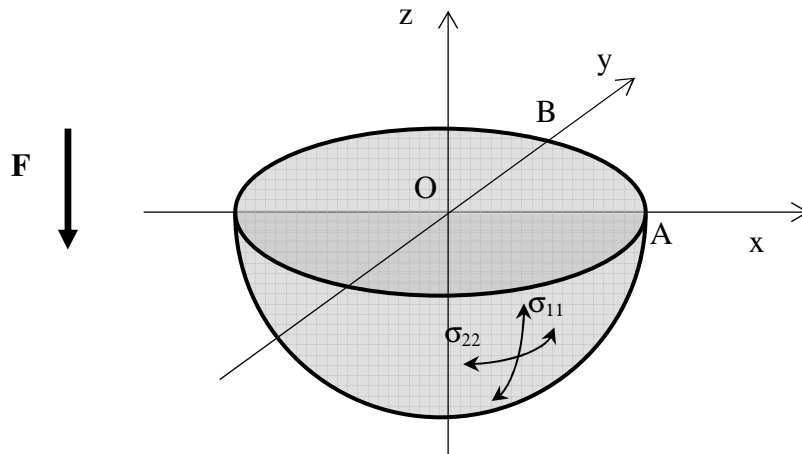
Maillage T3 Delaunay

Grandeur physique Position	CM2 10x16	CM2 20x32	CM2 40x64	Référence
$\sigma_{22}(A) = \sigma_{yy}(A)$	1.658	8.937	7.625	8.26 E5
$\sigma_{22}(B) = \sigma_{xx}(B)$	1.657	8.937	7.625	8.26 E5
$U_x(A)$	2.264	3.314	3.795	3.93 E-6
$U_y(B)$	2.264	3.314	3.795	3.93 E-6
DDLs / Temps	626 / 0.40 s	2386 / 1.62 s	9458 / 8.80	

Remarques :

- 1- On a maillé comme précédemment et appliqué les conditions de symétrie.
- 2- Les moments ont été modélisés par des moments uniformes par arête, de direction donnée par la tangente au cercle au centre de gravité de chaque arête.
- 3- Il faut mailler très finement pour obtenir la convergence.

SSLS17 – Calotte sphérique sous son poids propre (hémisphère)



Modèle coque : $U_x, U_y, U_z, R_x, R_y, R_z$

Données fournies :

$$h = 0.02$$

$$R = 1$$

$$E = 2.1 \text{ E}11$$

$$\nu = 0.3$$

$$\text{Force } F = -1570 / \text{unité de surface}$$

$$U_z(z=0) = 0$$

Données supplémentaires :

point A (R, 0, 0) point B (0, R, 0)

Maillage Q4 Delaunay

Grandeur physique Position	CM2 10x16	CM2 20x32	CM2 40x64	Référence
$\sigma_{11}(A) = \sigma_{zz}(A)$	7.324	7.549	7.686	7.85 E4
$\sigma_{22}(A) = \sigma_{yy}(A)$	-7.912	-7.979	-7.916	-7.85 E4
$\sigma_{11}(B) = \sigma_{zz}(B)$	7.158	7.549	7.688	7.85 E4
$\sigma_{22}(B) = \sigma_{xx}(B)$	-7.930	-7.983	-7.915	-7.85 E4
$U_x(A)$	-4.780	-4.872	-4.871	4.86 E-7
$U_y(B)$	-4.856	-4.874	-4.870	4.86 E-7
DDLs / Temps	596 / 0.43 s	2236 / 1.68 s	8876 / 8.66 s	

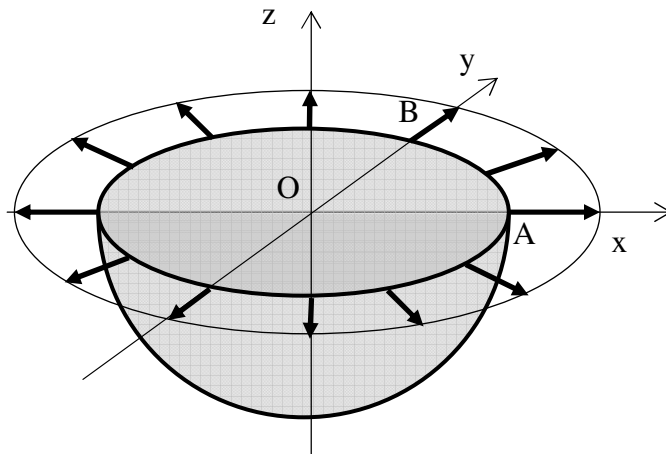
Maillage T3 Delaunay

Grandeur physique Position	CM2 10x16	CM2 20x32	CM2 40x64	Référence
$\sigma_{11}(A) = \sigma_{zz}(A)$	7.639 E4	7.433 E4	7.718 E4	7.85 E4
$\sigma_{22}(A) = \sigma_{yy}(A)$	-6.988 E4	-8.261 E4	-7.826 E4	-7.85 E4
$\sigma_{11}(B) = \sigma_{zz}(B)$	7.639 E4	7.433 E4	7.718 E4	7.85 E4
$\sigma_{22}(B) = \sigma_{xx}(B)$	-6.990 E4	-8.261 E4	-7.826 E4	-7.85 E4
$U_x(A)$	-4.773 E-7	-4.871 E-7	-4.857 E-7	4.86 E-7
$U_y(B)$	-4.774 E-7	-4.871 E-7	-4.857 E-7	4.86 E-7
DDLs / Temps	626 / 0.30 s	2386 / 1.61 s	9458 / 8.73 s	

Remarques :

- 1- On a maillé comme précédemment et appliqué les conditions de symétrie.

SSLS18 – Calotte sphérique sous déplacement imposé (hémisphère)



Modèle coque : $U_x, U_y, U_z, R_x, R_y, R_z$

Données fournies :

$$h = 0.02$$

$$R = 1$$

$$E = 2.1 \text{ E}11$$

$$\nu = 0.3$$

Déplacement radial imposé $U_0 = 1 \text{ E-}4$

$$U_z(z=0) = 0 \text{ et } R_x(z=0) = R_y(z=0) = R_z(z=0) = 0$$

Données supplémentaires :

point A (R, 0, 0) point B (0, R, 0)

Maillage Q4 Delaunay

Grandeur physique Position	CM2 10x16	CM2 20x32	CM2 40x64	Référence
$\sigma_{11}(A) = \sigma_{zz}(A)$	0.120 E7	0.037 E7	0.011 E7	0.0
$\sigma_{22}(A) = \sigma_{yy}(A)$	2.126 E7	2.113 E7	2.104 E7	2.1 E7
$\sigma_{11}(B) = \sigma_{zz}(B)$	0.091 E7	0.038 E7	0.011 E7	0.0
$\sigma_{22}(B) = \sigma_{xx}(B)$	2.134 E7	2.113 E7	2.104 E7	2.1 E7
DDLs / Temps	549 / 0.69 s (17 iters)	2141 / 3.11 s (22 iters)	8685 / 18.72 s (29 iters)	

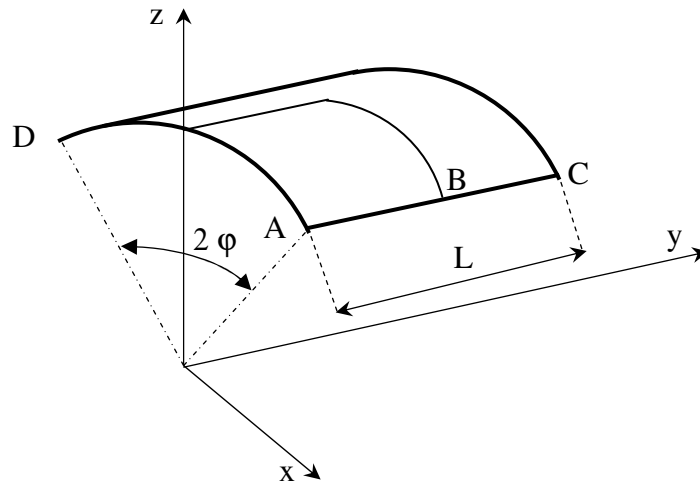
Maillage T3 Delaunay

Grandeur physique Position	CM2 10x16	CM2 20x32	CM2 40x64	Référence
$\sigma_{11}(A) = \sigma_{zz}(A)$	-0.74 E7	0.031 E7	0.005 E7	0.0
$\sigma_{22}(A) = \sigma_{yy}(A)$	1.807 E7	2.339 E7	2.099 E7	2.1 E7
$\sigma_{11}(B) = \sigma_{zz}(B)$	-0.74 E7	0.031 E7	0.005 E7	0.0
$\sigma_{22}(B) = \sigma_{xx}(B)$	1.807 E7	2.339 E7	2.099 E7	2.1 E7
DDLs / Temps	579 / 0.68 s (19 iters)	2291 / 3.09 s (22 iters)	9267 / 18.89 s (29 iters)	

Remarques :

- 1- On a maillé comme précédemment et appliqué les conditions de symétrie.
- 2- Les déplacements imposés sont appliqués par un algorithme du gradient projeté. Le nombre d'itérations à convergence est indiqué entre parenthèses.

SSLS19 – Coque cylindrique soumise à son poids propre



Modèle coque : $U_x, U_y, U_z, R_x, R_y, R_z$

Données fournies :

$$h = 0.03$$

$$R = 3$$

$$L = 6$$

$$E = 3 \text{ E}10$$

$$\nu = 0.0$$

$$F_z = -6250$$

$$\text{Bord AD : } U_x = U_z = 0, \theta_y = 0$$

Bord AB : libre

Maillage Q4

Grandeur physique Position	CM2 10x10	CM2 20x20	CM2 40x40	Référence
U_z (B)	-3.580 E-2	-3.697 E-2	-3.636 E-2	-3.70 E-2
DDLs / Temps	630 / 0.41 s	2460 / 1.63 s	9720 / 13.8 s	

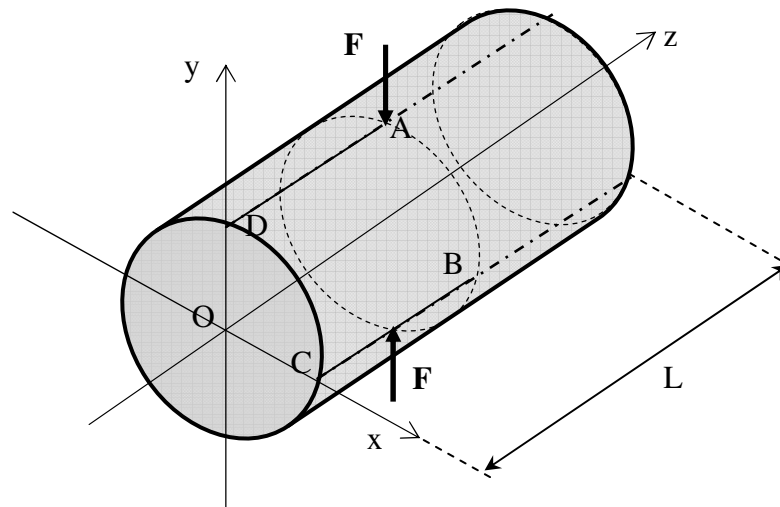
Maillage T3 UJ

Grandeur physique Position	CM2 10x10	CM2 20x20	CM2 40x40	Référence
U_z (B)	-3.307 E-2	-3.574 E-2	-3.613 E-2	-3.70 E-2
DDLs / Temps	630 / 0.35 s	2460 / 1.08 s	9720 / 5.25 s	

Remarques :

- 1- On a maillé $\frac{1}{4}$ du cylindre en appliquant les conditions de symétrie adéquates.

SSLS20 – Coque cylindrique pincée



Modèle coque : $U_x, U_y, U_z, R_x, R_y, R_z$

Données fournies :

$$h = 0.094$$

$$R = 4.953$$

$$L = 10.35$$

$$E = 10.5 \text{ E}6$$

$$\nu = 0.3125$$

$$F = 100$$

Conditions libres

Maillage Q4

Grandeur physique Position	CM2 10x10	CM2 20x20	CM2 40x40	Référence
$U_y (A)$	-111.2 E-3	-113.2 E-3	-113.8 E-3	-113.9 E-3
DDLs / Temps	629 / 0.38 s	2459 / 1.57 s	9719 / 13.8 s	

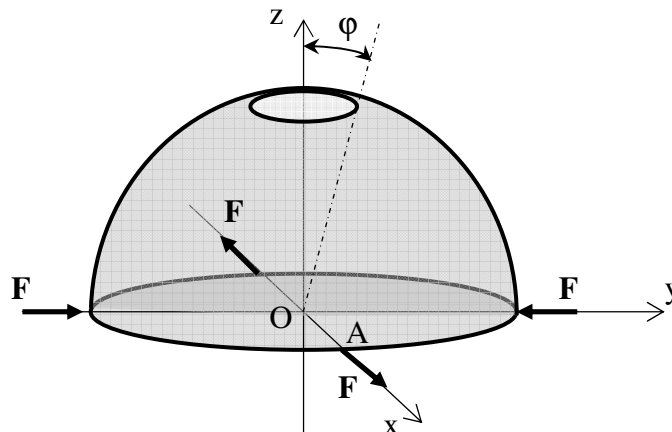
Maillage T3 UJ

Grandeur physique Position	CM2 10x10	CM2 20x20	CM2 40x40	Référence
$U_y (A)$	-110.4 E-3	-112.8 E-3	-113.7 E-3	-113.9 E-3
DDLs / Temps	629 / 0.33 s	2459 / 1.07 s	9719 / 5.16 s	

Remarques :

- 1- On a maillé $\frac{1}{4}$ du cylindre en appliquant les conditions de symétrie adéquates.

SSLS21 – Coque sphérique trouée



Modèle coque : $U_x, U_y, U_z, R_x, R_y, R_z$

Données fournies :

$$h = 0.04$$

$$R = 10$$

$$E = 6.825 \text{ E}7$$

$$\nu = 0.3$$

$$\phi = 18^\circ$$

$$F = 2$$

Conditions libres

Maillage Q4

Grandeur physique Position	CM2 10x10	CM2 20x20	CM2 40x40	Référence
$U_x (A)$	92.53 E-3	93.01 E-3	93.41 E-3	94.0 E-3
DDLs / Temps	659 / 0.38 s	2519 / 1.58 s	9839 / 14.1 s	

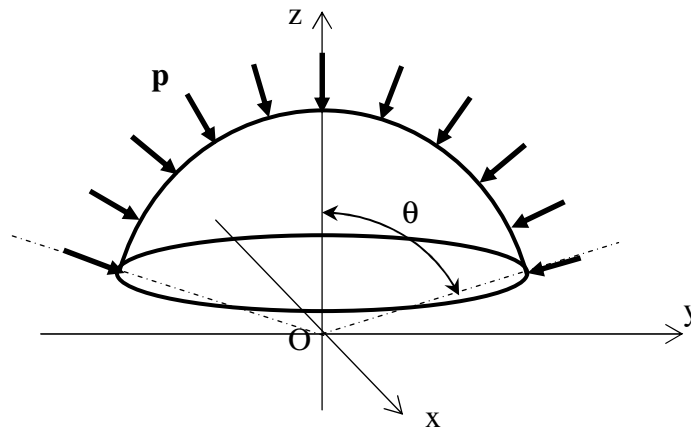
Maillage T3 UJ

Grandeur physique Position	CM2 10x10	CM2 20x20	CM2 40x40	Référence
$U_x (A)$	88.33 E-3	91.59 E-3	92.91 E-3	94.0 E-3
DDLs / Temps	659 / 0.35 s	2519 / 1.06 s	9839 / 5.03 s	

Remarques :

- 1- On a maillé $\frac{1}{4}$ de la coque en appliquant les conditions de symétrie adéquates + $U_z(A) = 0$.
- 2- En accord avec d'autres références pour ce test, nous avons utilisé $E = 6.825 \text{ E}7$ au lieu de $6.285 \text{ E}7$ donné dans le guide.

SSLS22 – Dôme sphérique sous pression extérieure uniforme



Modèle coque : $U_x, U_y, U_z, R_x, R_y, R_z$

Données fournies :

$$h = 0.0127$$

$$R = 2.54$$

$$\theta = 75^\circ$$

$$E = 6.897 \text{ E}10$$

$$\nu = 0.2$$

$$p = 0.6897 \text{ E}6$$

Base encastrée

Données supplémentaires :

Points A60 ($\theta=60^\circ$), A30 ($\theta=30^\circ$) dans le plan OXZ

Points B60 ($\theta=60^\circ$), B30 ($\theta=30^\circ$) dans le plan OYZ

Maillage Q4 Delaunay

Grandeur physique Position	CM2 10x10	CM2 20x20	CM2 40x40	Référence
U_x (A60)	-1.934 E-3	-1.665 E-3	-1.747 E-3	-1.73 E-3
U_y (B60)	-1.283 E-3	-1.711 E-3	-1.754 E-3	-1.73 E-3
U_x (A30)	-1.313 E-3	-1.007 E-3	-1.015 E-3	-1.02 E-3
U_y (B30)	-1.027 E-3	-1.008 E-3	-1.015 E-3	-1.02 E-3
σ_{11} (A60)	-7.613 E7	-6.782 E7	-6.780 E7	-7.4 E7
σ_{11} (B60)	-6.124 E7	-6.628 E7	-6.764 E7	-7.4 E7
σ_{11} (A30)	-7.369 E7	-6.878 E7	-6.877 E7	-6.8 E7
σ_{11} (B30)	-6.867 E7	-6.911 E7	-6.884 E7	-6.8 E7
DDLs / Temps	445 / 0.35 s	1321 / 0.97 s	5041 / 4.35 s	

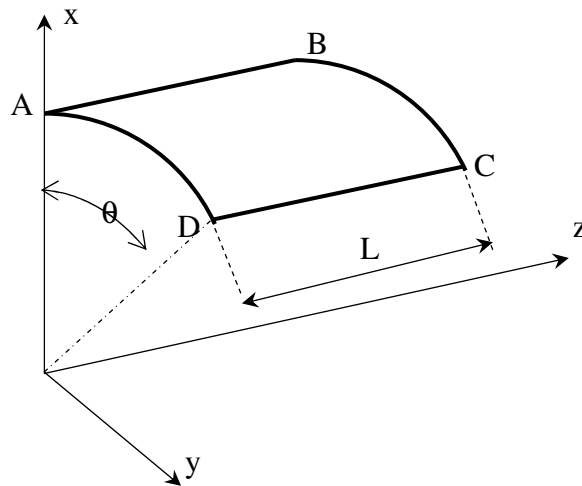
Maillage T3 Delaunay

Grandeur physique Position	CM2 10x10	CM2 20x20	CM2 40x40	Référence
U _x (A60)	-1.525 E-3	-1.542 E-3	-1.690 E-3	-1.73 E-3
U _y (B60)	-1.533 E-3	-1.541 E-3	-1.696 E-3	-1.73 E-3
U _x (A30)	-0.960 E-3	-1.009 E-3	-1.016 E-3	-1.02 E-3
U _y (B30)	-0.985E-3	-1.009 E-3	-1.016 E-3	-1.02 E-3
σ_{11} (A60)	-6.997 E7	-6.131 E7	-6.675 E7	-7.4 E7
σ_{11} (B60)	-7.060 E7	-6.130 E7	-6.678 E7	-7.4 E7
σ_{11} (A30)	-6.546 E7	-6.827 E7	-6.894 E7	-6.8 E7
σ_{11} (B30)	-6.759 E7	-6.849 E7	-6.896 E7	-6.8 E7
DDLs / Temps	337 / 0.26 s	1279 / 0.83 s	5263 / 4.16 s	

Remarques :

- 1- On a maillé ¼ de la coque en appliquant les conditions de symétrie adéquates.
- 2- En référence est donnée la contrainte "méridienne extérieure". Nous avons pour notre part indiqué la contrainte membranaire, sans les efforts de flexion car ceux-ci sont d'après nos calculs négligeables. On ne converge pas vers la valeur $\sigma_{11}(60^\circ)$ donnée en référence.

SSLS23 – Membrane cylindrique chargée en flexion



Modèle coque : $U_x, U_y, U_z, R_x, R_y, R_z$

Données fournies :

$$h = 0.01$$

$$R = 1$$

$$L = 0.5$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$E = 2.1 \text{ E}11$$

$$\nu = 0.3$$

AB : encastré, AD et BC : $U_z = 0, R_x = R_y = 0$

Point E ($\theta = 20^\circ, z = 0.3$)

2 cas de charge :

1- moment $C_z = 1 \text{ E}3$ sur DC,

2- pression intérieure $p = 6 \text{ E}5$ + force tangente $F = 6 \text{ E}5$ sur DC

Maillage Q4 Delaunay

Grandeur physique Position	CM2 10x10	CM2 20x20	CM2 40x40	Référence
1- $\sigma_{11}(E)$	61.04 E6	59.66 E6	60.86 E6	60 E6
2- $\sigma_{11}(E)$	59.20 E6	60.02 E6	60.28 E6	60 E6
DDLs / Temps	588 / 0.60 s	2748 / 2.76 s	10956 / 15.14s	

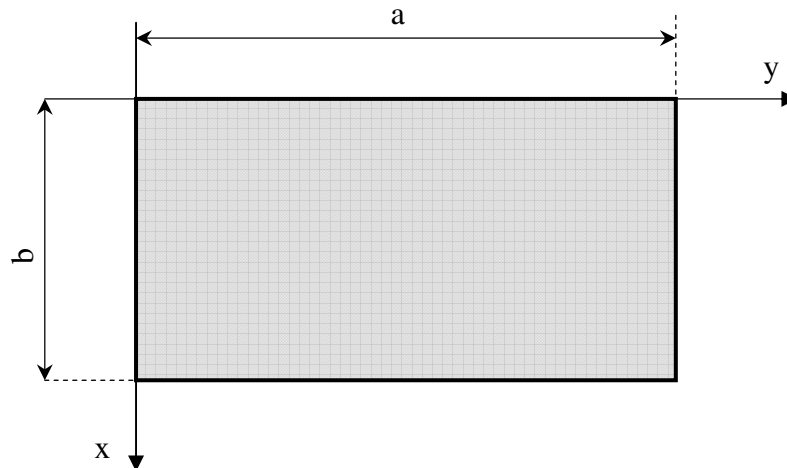
Maillage T3 Delaunay

Grandeur physique Position	CM2 10x10	CM2 20x20	CM2 40x40	Référence
1- $\sigma_{11}(E)$	60.31 E6	59.87 E6	59.87 E6	60 E6
2- $\sigma_{11}(E)$	60.99 E6	60.31 E6	60.10 E6	60 E6
DDLs / Temps	780 / 0.70 s	2952 / 2.67 s	11292 / 13.6 s	

Remarques :

- 1- On a imposé le point E en maillant libre (Delaunay).
- 2- On a donné la contrainte en peau extérieure : $\sigma_{11} = N_{11}/h - 6M_{11}/h^2$ (signe moins car la surface est orientée vers le centre).
- 3- Les deux cas de charge sont calculés simultanément (2 colonnes au second membre).

SSLS24 – Plaque rectangulaire sur appuis simples avec chargement uniforme



Modèle plaque : U_z , R_x , R_y

Données fournies :

$$h = 0.01$$

$$a = 1$$

$$E = 1 \text{ E6}$$

$$\nu = 0.3$$

Appui simple sur tout le pourtour : $U_z = 0$

pression uniforme $p = 1$

Point G ($a/2$, $b/2$) centre

Maillage Q4

Grandeur physique Position	CM2 10x10	CM2 20x20	CM2 40x40	Référence
$b/a = 1$, $U_z(G)$	0.04428	0.04443	0.04453	0.0443
$b/a = 1$, $M_{xx}(G)$	0.04825	0.04804	0.04803	0.0479
$b/a = 1$, $M_{yy}(G)$	0.04825	0.04804	0.04803	0.0479
$b/a = 2$, $U_z(G)$	0.1102	0.1106	0.1108	0.1106
$b/a = 2$, $M_{xx}(G)$	0.1022	0.1019	0.1018	0.1017
$b/a = 2$, $M_{yy}(G)$	0.04632	0.04637	0.04639	0.0464
$b/a = 5$, $U_z(G)$	0.1397	0.1412	0.1416	0.1416
$b/a = 5$, $M_{xx}(G)$	0.1240	0.1245	0.1246	0.1246
$b/a = 5$, $M_{yy}(G)$	0.3725	0.03765	0.03772	0.0375
DDLs / Temps	323 / 0.39 s	1243 / 1.20 s	4883 / 5.24 s	

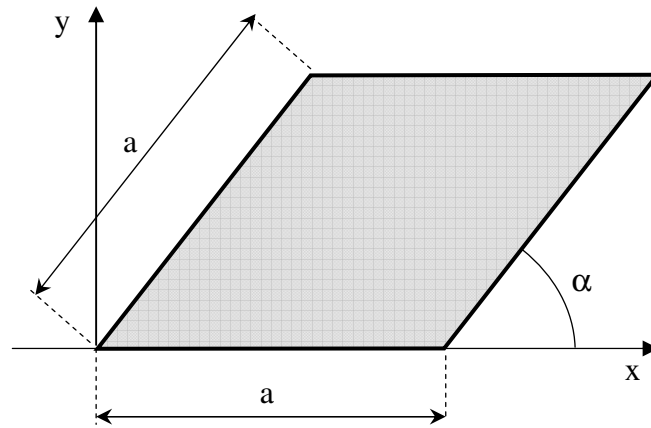
Maillage T3 Delaunay

Grandeur physique Position	CM2 10x10	CM2 20x20	CM2 40x40	Référence
b/a = 1, $U_z(G)$	0.04236	0.04401	0.04442	0.0443
b/a = 1, $M_{xx}(G)$	0.04708	0.04722	0.04786	0.0479
b/a = 1, $M_{yy}(G)$	0.04563	0.04722	0.04786	0.0479
b/a = 2, $U_z(G)$	0.1062	0.1097	0.1105	0.1106
b/a = 2, $M_{xx}(G)$	0.09923	0.1006	0.1015	0.1017
b/a = 2, $M_{yy}(G)$	0.04310	0.04586	0.04625	0.0464
b/a = 5, $U_z(G)$	0.1426	0.1412	0.1415	0.1416
b/a = 5, $M_{xx}(G)$	0.1271	0.1245	0.1245	0.1246
b/a = 5, $M_{yy}(G)$	0.03778	0.03787	0.03772	0.0375
DDLs / Temps	323 / 0.41 s	1243 / 1.11 s	4883 / 4.11 s	

Remarques :

- 1- On a maillé de manière structurée et de façon avoir le point G comme nœud du maillage.
- 2- Au lieu de prendre $E = 1 \text{ E}7$, nous avons pris $E = 1 \text{ E}6$ pour obtenir directement le coefficient α donné en référence.
- 3- Rappelons que les valeurs de références sont issues d'un modèle KL, donc plus raide que le modèle Mindlin utilisé dans nos calculs.

SSLS25 – Plaque losange en flexion sur appuis



Modèle plaque : U_z , R_x , R_y

Données fournies :

$$h = 0.01$$

$$a = 1$$

$$E = 30 \text{ E}6$$

$$\nu = 0.3$$

Appui simple SS2 sur tout le pourtour : $U_z = 0$, $R_n = 0$

Pression uniforme $p = 1$

Point C au centre

Maillage Q4

Grandeur physique Position	CM2 10x10	CM2 20x20	CM2 40x40	Référence
$\alpha = 80^\circ$, $U_z(C)$	1.404	1.410	1.414	1.409 E-3
$\alpha = 60^\circ$, $U_z(C)$	0.9150	0.9291	0.9364	0.9318 E-3
$\alpha = 40^\circ$, $U_z(C)$	0.3242	0.3407	0.3501	0.3487 E-3
$\alpha = 30^\circ$, $U_z(C)$	0.1325	0.1424	0.1486	0.1485 E-3
DDLs / Temps	323 / 0.28 s	1243 / 0.74 s	4883 / 3.31 s	

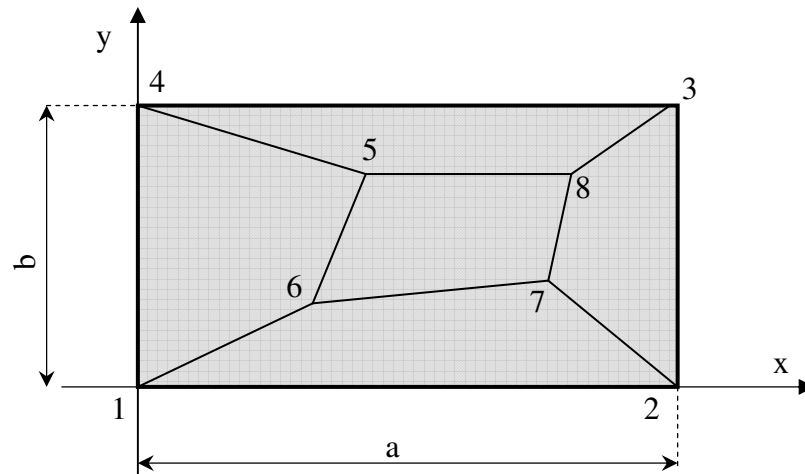
Maillage T3 UJ

Grandeur physique Position	CM2 10x10	CM2 20x20	CM2 40x40	Référence
$\alpha = 80^\circ$, $U_z(C)$	1.347	1.397	1.410	1.409 E-3
$\alpha = 60^\circ$, $U_z(C)$	0.8895	0.9239	0.9352	0.9318 E-3
$\alpha = 40^\circ$, $U_z(C)$	0.3273	0.3444	0.3520	0.3487 E-3
$\alpha = 30^\circ$, $U_z(C)$	0.1341	0.1449	0.1501	0.1485 E-3
DDLs / Temps	323 / 0.28 s	1243 / 0.64 s	4883 / 2.33 s	

Remarques :

- 1- On a maillé de manière structurée et de façon avoir le point C comme nœud du maillage.
- 2- La valeur du module d'Young donnée en référence semble fausse. Au lieu de $E = 36 \text{ E6}$, nous avons pris $E = 30 \text{ E6}$.

SSLS26 – Plaque rectangulaire sur appuis simples avec efforts et moments ponctuels



Modèle plaque : U_z , R_x , R_y

Données fournies :

$$h = 1$$

$$a = 40$$

$$b = 20$$

$$E = 1000$$

$$\nu = 0.3$$

Appui simple aux points 1, 2 et 4

Moments ponctuels :

$$M(P1) = (+20, -10, 0)$$

$$M(P2) = (+20, +10, 0)$$

$$M(P3) = (-20, +10, 0)$$

$$M(P4) = (-20, -10, 0)$$

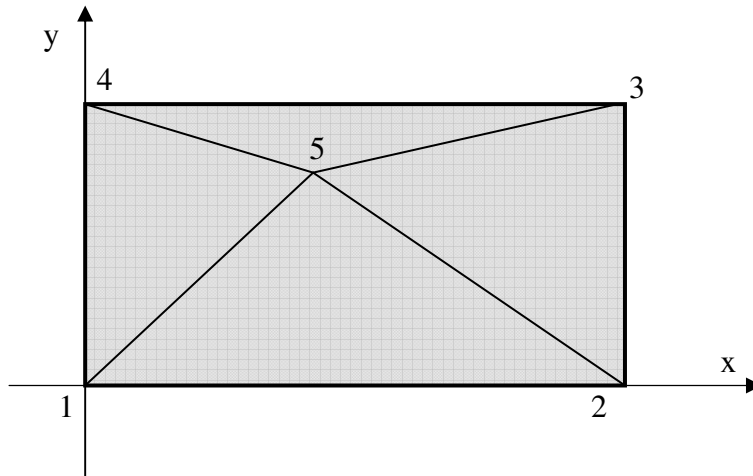
Force ponctuelle en P3

$$F(P3) = (0,0,-2)$$

Points P5(15, 15, 0), P6 (10, 5, 0), P7(30, 7.5, 0), P8(32.5, 15, 0)

Maillage Q4

Grandeur physique Position	CM2 h = 1	CM2 h = 0.001	Référence
$U_z(C)$	-12.542	-12.480	-12.480
$R_x(C)$	-0.7100	-0.7080	-1.020
$R_y(C)$	0.4806	0.4800	0.482
$M_{xx}(C)$	0.9928	1.00	1.00
$M_{yy}(C)$	0.9891	1.00	1.00
$M_{xy}(C)$	0.9924	1.00	1.00
DDLs / Temps	21 / 0.01 s	21 / 0.01 s	



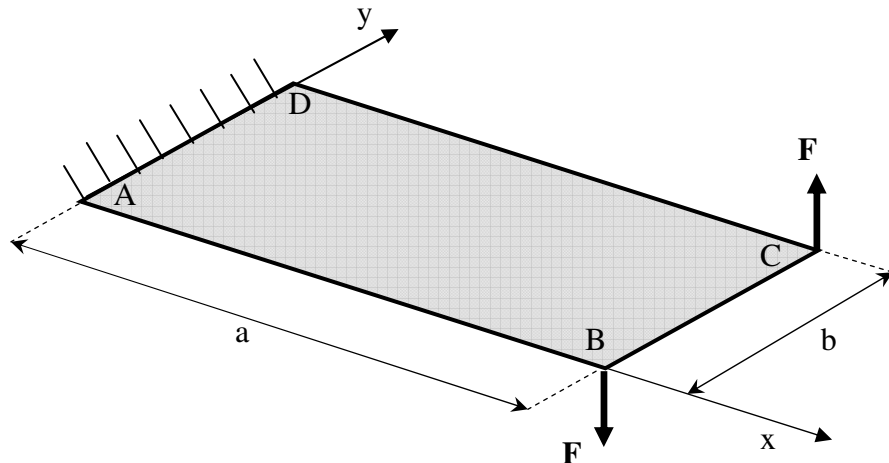
Maillage T3

Grandeur physique Position	CM2 h = 1	CM2 h = 0.001	Référence
Uz(C)	-12.553	12.520	-12.480
Rx(C)	-0.7012	-0.6987	-1.020
Ry(C)	0.4816	0.4823	0.482
Mxx(C)	0.9598	0.9641	1.00
Myy(C)	0.9347	0.9299	1.00
Mxy(C)	0.9710	0.9744	1.00
DDLs / Temps	12 / 0.01 s	12 / 0.01 s	

Remarques :

- 1- On a maillé en suivant les descriptions classiques du patch-test représentées ci-dessus.
- 2- Les valeurs de déplacement et de rotation sont valables pour un modèle KL. Pour les retrouver avec notre modèle élément fini de Mindlin il est nécessaire d'avoir un élanement plus important. Avec un ratio $h/a = 10^{-4}$, l'élément Q4 passe le patch-test (valeurs exactes). En revanche, l'élément T3 ne le passe qu'en membrane et en flexion pure. En cisaillement transverse, comme c'est le cas ici, on n'obtient pas tout à fait les valeurs exactes. Ceci est dû au fait que l'on a sous-intégré l'élément (1 seul point de Gauss). Avec 3 points, on retrouve les valeurs exactes (toujours pour un élanement de 10^{-4}). Il nous semble plus intéressant de garder 1 point et gagner ainsi en vitesse plutôt que d'avoir une précision peu utile. Surtout, que cette différence s'annule lorsque le maillage est symétrique ou moins grossier.

SSLS27 – Plaque en cisaillement perpendiculaire à la surface moyenne



Modèle plaque : U_z , R_x , R_y

Données fournies :

$$h = 0.05$$

$$a = 12$$

$$b = 1$$

$$E = 1 \text{ E}7$$

$$\nu = 0.25$$

Encastrement sur AD

Forces $F(B) = -1$, $F(C) = 1$

Maillage Q4

Grandeur physique Position	CM2 4x4	CM2 12x4	CM2 48x4	Référence
$U_z(C)$	34.79 E-3	35.42 E-3	35.54 E-3	35.37 E-3
DDLs / Temps	60 / 0.17 s	180 / 0.21 s	720 / 0.39 s	

Maillage T3 UJ

Grandeur physique Position	CM2 4x4	CM2 12x4	CM2 48x4	Référence
$U_z(C)$	21.35 E-3	32.57 E-3	35.35-3	35.37 E-3
DDLs / Temps	60 / 0.17 s	180 / 0.18 s	720 / 0.38 s	

Remarques :

- 1- On a maillé de manière structurée avec des rapports de maille variant de 1 (pour le maillage 48x4) à 12 (maillage 4x4).