

DOSSIER DE VALIDATION

ANALYSE MODALE

-

CM2 Version 2.16

Mars 2000

-

Computing Objects

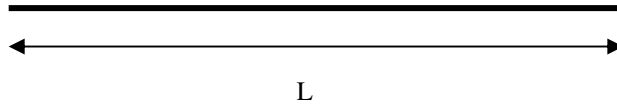
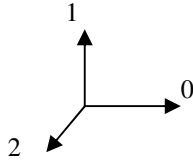
Les formules et valeurs de référence utilisées dans ce dossier sont tirées de l'ouvrage "Vibrations des systèmes mécaniques" ??

Elles ont été formulées à partir des modèles de poutre et de plaque sans cisaillement transverse (modèles Euler-Bernouilli et Kirchhoff-Love) et ne tenant pas compte des inerties de rotation (masse en déplacement seule). En revanche, nos calculs par éléments finis sont fondés sur des modèles avec cisaillement transverse (modèles Timoshenko et Mindlin). Pour simuler le modèle de poutre sans CT, nous avons multiplié par 1000 les sections effectives de cisaillement transverse.

La tolérance d'arrêt des itérations de l'algorithme hybride Lanczos-Sous Espace est fixée à 10^{-8} . On a désactivé le dénombrement des valeurs propres (séquence de Sturm) en demandant les N valeurs les plus basses (domaine de recherche = [0, DBL_MAX]).

Tous les calculs ont été effectués sur PC Pentium Pro 200 Mhz, 128 Mo RAM, Windows NT4, en mode incore (toutes les matrices tenant en mémoire vive).

POUTRES DROITES



$$L = 20, S_0 = 1$$

$$I_{11} = I_{22} = 0.0833$$

$$I_{33} = 0.1666$$

$$E = 1E8, G = E / 2.6 \quad (\nu = 0.3)$$

$$\rho = 8000$$

Axe 0 = axe de la poutre

Axe 1 = troisième nœud

Forme générale des fréquences propres pour le modèle Euler-Bernouilli sans cisaillement transverse (CT) avec masse linéique sur les déplacements seuls:

$$f = \frac{\alpha^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

Encastrée – Encastrée

Modèle avec CT (Timoshenko)

$$S_1 = S_2 = S_0$$

		Masse complète (U + R)			Masse linéique sur U seul		
α	f_{th}	N = 10	N = 20	N = 40	N = 10	N = 20	N = 40
4.730 (x2)	0.2873	0.2874	0.2842	0.2834	0.2877	0.2846	0.2838
7.853 (x2)	0.7919	0.8098	0.7771	0.7689	0.8129	0.7803	0.7722
10.996 (x2)	1.553	1.651	1.511	1.478	1.663	1.524	1.490
torsion	1.733	1.748	1.737	1.734	-	-	-
14.137 (x2)	2.566	2.894	2.480	2.387	2.925	2.512	2.419
traction/compr.	2.795	2.818	2.801	2.796	2.818	2.801	2.796
iters / temps N = 10		4 / 0.17 s	3 / 0.18 s	4 / 0.30 s	2 / 0.06 s	2 / 0.15 s	3 / 0.24 s

Modèle sans CT (Euler-Bernouilli)

$$S_1 = S_2 = 1000 S_0$$

		Masse complète (U + R)			Masse linéique sur U seul		
α	f_{th}	N = 10	N = 20	N = 40	N = 10	N = 20	N = 40
4.730 (x2)	0.2873	0.2913	0.2880	0.2872	0.2916	0.2824	0.2876
7.853 (x2)	0.7919	0.8343	0.7996	0.7910	0.8379	0.8074	0.7948
10.996 (x2)	1.553	1.739	1.585	1.549	1.754	1.601	1.564
torsion	1.733	1.748	1.737	1.734	-	-	-
14.137 (x2)	2.566	3.135	2.663	2.556	3.178	2.708	2.601
traction/compr.	2.795	2.818	2.801	2.797	2.818	2.801	2.796
iters / temps N = 10		3 / 0.13 s	3 / 0.18 s	4 / 0.29 s	2 / 0.12 s	2 / 0.14 s	2 / 0.21 s

Remarques :

1 - Le modèle EF sans CT et masse sur U seul correspond au modèle théorique (Euler-Bernouilli).

Avec le cisaillement transverse, le modèle est plus souple ce qui donne des fréquences plus basses.

2 - Avec les inerties de rotations les fréquences sont encore abaissées. De plus, les fréquences de torsions apparaissent.

3 - Pour capter avec une bonne précision les modes de flexion 1 et 2 (1/2 et 1 onde), 10 éléments suffisent. Pour les modes 3 et 4 (1,5 et 2 ondes), il faut au moins 20 éléments. On compte généralement un minimum de 8 éléments par longueur d'onde.

4 - Ces calculs ont été effectués en demandant les 10 modes les plus bas.

Encastrée – libre

Modèle avec CT (Timoshenko)

$$S_1 = S_2 = S_0$$

		Masse complète (U + R)			Masse linéique sur U seul		
α	f_{th}	N = 10	N = 20	N = 40	N = 10	N = 20	N = 40
4.730 (x2)	0.04515	0.04513	0.04509	0.04507	0.04515	0.04511	0.04510
7.853 (x2)	0.2829	0.2865	0.2813	0.2800	0.2874	0.2822	0.2809
10.996 (x2)	0.7923	0.8262	0.7839	0.7737	0.8325	0.7898	0.7796
torsion	0.8667	0.8685	0.8672	0.8668	-	-	-
traction/compr.	1.397	1.400	1.398	1.398	1.400	1.398	1.398
14.137 (x2)	1.553	1.701	1.528	1.489	1.724	1.549	1.509
iters / temps N = 10		1 / 0.11 s	2 / 0.16 s	2 / 0.22 s	1 / 0.09 s	2 / 0.15 s	2 / 0.20 s

Modèle sans CT (Euler-Bernouilli)

$$S_1 = S_2 = 1000 S_0$$

		Masse complète (U + R)			Masse linéique sur U seul		
α	f_{th}	N = 10	N = 20	N = 40	N = 10	N = 20	N = 40
4.730 (x2)	0.04515	0.04518	0.04514	0.04513	0.04520	0.04516	0.04515
7.853 (x2)	0.2829	0.2890	0.2837	0.2824	0.2900	0.2847	0.2834
10.996 (x2)	0.7923	0.8438	0.7999	0.7894	0.8507	0.8064	0.7957
torsion	1.739	0.8685	0.8672	0.8668	-	-	-
traction/compr.	1.397	1.400	1.398	1.398	1.400	1.398	1.398
14.137 (x2)	1.553	1.769	1.585	1.543	1.796	1.609	1.566
iters / temps tol = 10^{-8} N = 10		1 / 0.10 s	2 / 0.16 s	2 / 0.23 s	1 / 0.10 s	2 / 0.14 s	1 / 0.16 s

Libre – Libre

Modèle avec CT (Timoshenko)

$$S_1 = S_2 = S_0$$

		Masse complète (U + R)			Masse linéique sur U seul		
α	f_{th}	N = 10	N = 20	N = 40	N = 10	N = 20	N = 40
<i>corps rigide (x6)</i>	0	0	0	0	0	0	0
4.730 (x2)	0.2873	0.2939	0.2871	0.2854	0.2955	0.2886	0.2869
7.853 (x2)	0.7919	0.8429	0.7902	0.7779	0.8528	0.7989	0.7864
10.996 (x2)	1.553	1.755	1.546	1.501	1.791	1.575	1.528
<i>torsion</i>	1.733	1.748	1.737	1.734	-	-	-
14.137 (x2)	2.566	3.166	2.554	2.433	3.261	2.621	2.495
<i>traction/compr.</i>	2.795	2.818	2.801	2.796	2.818	2.801	2.796
<i>iters / temps</i> N = 16		1 / 0.15 s	1 / 0.18 s	2 / 0.30 s	1 / 0.14 s	1 / 0.18 s	1 / 0.23 s

Modèle sans CT (Euler- Bernouilli)

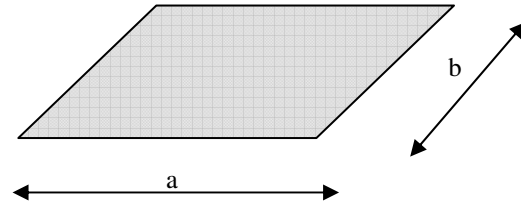
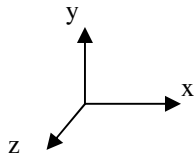
$$S_1 = S_2 = 1000 S_0$$

		Masse complète (U + R)			Masse linéique sur U seul		
α	f_{th}	N = 10	N = 20	N = 40	N = 10	N = 20	N = 40
<i>corps rigide (x6)</i>	0	0	0	0	0	0	0
4.730 (x2)	0.2873	0.2949	0.2880	0.2864	0.2964	0.2895	0.2878
7.853 (x2)	0.7919	0.8532	0.7996	0.7872	0.8636	0.8087	0.7961
10.996 (x2)	1.553	1.802	1.585	1.538	1.841	1.617	1.568
<i>torsion</i>	1.733	1.748	1.737	1.734	-	-	-
14.137 (x2)	2.566	3.312	2.663	2.534	3.429	2.744	2.609
<i>traction/compr.</i>	2.795	2.818	2.801	2.796	2.818	2.801	2.796
<i>iters / temps</i> N = 16		1 / 0.15 s	1 / 0.16 s	2 / 0.31 s	1 / 0.16 s	1 / 0.18 s	1 / 0.23 s

Remarques :

- 1 - Sans les inerties de rotation, il manque un mode de corps rigide (rotation autour de l'axe 0) ainsi que le mode de torsion.

PLAQUES RECTANGULAIRES



Prenons :

$$b = 10$$

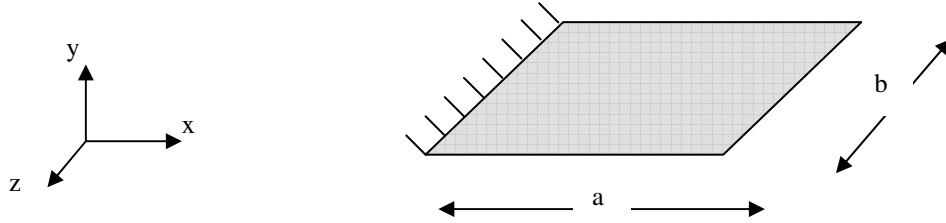
$$h = 0.2$$

$$E = 2^{11}, \nu = 0.3$$

$$\rho = 7800$$

Forme générale des fréquences propres (modèle Kirchhoff-Love sans CT, masse surfacique sur les déplacements seuls) :

$$f = \frac{\alpha}{2\pi} \sqrt{\frac{Eh^2}{\rho a^4(1-\nu^2)}}$$

Encastrée – libre

Maillage réglé Q4 (avec CT, masse surfacique U seul)

a / b = 1				a / b = 2			
α	f_{th}	N = 10	N = 20	α	f_{th}	N = 10	N = 20
1.009	1.705	1.695	1.693	1.002	0.4232	0.4201	0.4195
2.467	4.168	4.156	4.140	4.310	1.820	1.808	1.802
6.189	10.46	10.60	10.42	6.238	2.635	2.679	2.629
7.937	13.40	13.45	13.29	14.06	5.939	5.978	5.887
8.998	15.20	15.36	15.11	?	?	7.863	7.455
iters / temps N = 5 modes		5 / 0.51 s	3 / 1.60 s	iters / temps N = 5 modes		4 / 0.45 s	4 / 1.71 s

Maillage Delaunay Q4 (avec CT, masse surfacique U seul)

a / b = 1				a / b = 2			
α	f_{th}	N = 10	N = 20	α	f_{th}	N = 10	N = 20
1.009	1.705	1.694	1.692	1.002	0.4232	0.4200	0.4194
2.467	4.168	4.159	4.140	4.310	1.820	1.812	1.804
6.189	10.46	10.61	10.39	6.238	2.635	2.639	2.622
7.937	13.40	13.47	13.27	14.06	5.939	5.986	5.887
8.998	15.20	15.42	15.10	?	?	7.588	7.400
iters / temps N = 5 modes		4 / 0.42 s	5 / 2.28 s	iters / temps N = 5 modes		5 / 0.48 s	3 / 1.34 s

Maillage Delaunay T3 (avec CT, masse surfacique U seul)

a / b = 1				a / b = 2			
α	f_{th}	N = 10	N = 20	α	f_{th}	N = 10	N = 20
1.009	1.705	1.697	1.693	1.002	0.4232	0.4209	0.4197
2.467	4.168	4.177	4.143	4.310	1.820	1.834	1.808
6.189	10.46	10.58	10.41	6.238	2.635	2.662	2.626
7.937	13.40	13.58	13.31	14.06	5.939	6.116	5.915
8.998	15.20	15.50	15.14	?	?	7.717	7.433
iters / temps N = 5 modes		3 / 0.45 s	4 / 1.85 s	iters / temps N = 5 modes		3 / 0.33 s	3 / 1.10 s

Remarques :

1 - Le modèle élément finis utilisé (Mindlin) est plus souple que le modèle théorique (KL). Ce qui explique les fréquences légèrement plus basses.

Plaque carrée (a = b = 10)
Différentes conditions aux limites.

Maillage réglé Q4 (avec CT, masse surfacique U seul)

encastrée sur tout le pourtour				libre sur tout le pourtour			
α	f_{th}	N = 10	N = 20	α	f_{th}	N = 10	N = 20
	-	-	-	<i>corps rigide (x3)</i>	0	0	0
10.40	17.57	17.94	17.59	4.07	6.877	6.586	6.554
21.21(x2)	35.84	38.09	36.14	5.94	10.04	9.667	9.582
31.29	52.87	56.13	53.16	6.91	11.67	12.05	11.88
38.04	64.27	73.73	65.73	10.39 (x2)	17.55	17.18	16.97
38.22	64.58	74.09	66.06	17.80 (x2)	30.08	31.46	30.15
<i>iters / temps</i> <i>N = 6 modes</i>		6 / 0.48 s	7 / 1.92 s	<i>iters / temps</i> <i>N = 10 modes</i>		4 / 0.65 s	6 / 3.10 s

Maillage Delaunay Q4 (avec CT, masse surfacique U seul)

encastrée sur tout le pourtour				libre sur tout le pourtour			
α	f_{th}	N=10	N=20	α	f_{th}	N= 10	N= 20
				<i>corps rigide (x3)</i>	0	0	0
10.40	17.57	18.02	17.58	4.07	6.877	6.590	6.552
21.21(x2)	35.84	38.02 / 38.46	35.93 / 36.01	5.94	10.04	9.667	9.572
31.29	52.87	57.30	53.20	6.91	11.67	12.05	11.86
38.04	64.27	73.30	64.89	10.39 (x2)	17.55	17.23 / 17.27	16.96 / 16.97
38.22	64.58	74.04	65.30	17.80 (x2)	30.08	31.26 / 31.46	29.97 / 29.99
<i>iters / temps</i> <i>N = 6 modes</i>		6 / 0.44 s	6 / 2.41 s	<i>iters / temps</i> <i>N = 10 modes</i>		2 / 0.52 s	2 / 2.78 s

Maillage Delaunay T3 (avec CT, masse surfacique U seul)

encastrée sur tout le pourtour				libre sur tout le pourtour			
α	f_{th}	N=10	N=20	α	f_{th}	N= 10	N= 20
				<i>corps rigide (x3)</i>	0	0	0
10.40	17.57	18.24	17.65	4.07	6.877	6.612	6.559
21.21(x2)	35.84	38.66 / 38.72	36.25 / 36.27	5.94	10.04	9.727	9.598
31.29	52.87	59.03	53.75	6.91	11.67	12.07	11.89
38.04	64.27	73.15	65.83	10.39 (x2)	17.55	17.41 / 17.43	17.02 / 17.03
38.22	64.58	74.48	65.93	17.80 (x2)	30.08	31.50 / 31.53	30.16 / 30.17
<i>iters / temps N = 6 modes</i>		5 / 0.47 s	6 / 2.07 s	<i>iters / temps N = 10 modes</i>		2 / 0.59 s	4 / 3.03 s

Remarques :

- 1 - Les modes doubles sont séparés par la non symétrie des maillages libres.

Plaque circulaire (diamètre = a =10)
Différentes conditions aux limites.

Maillage Delaunay Q4 (avec CT, masse surfacique U seul)

encastree sur tout le pourtour				libre sur tout le pourtour			
α	f_{th}	N = 40	N = 80	α	f_{th}	N = 40	N = 80
	-	-	-	<i>corps rigide (x3)</i>	0	0	0
11.84	20.00	20.28	19.95	6.09 (x2)	10.29	10.52 / 10.53	10.46 / 10.46
24.61 (x2)	41.58	43.31 / 43.40	41.60 / 41.64	10.53	17.79	17.84	17.61
40.41(x2)	68.27	71.88 / 73.89	68.36 / 68.49	14.19 (x2)	23.98	24.60 / 24.68	24.30 / 24.30
46.14	77.96	84.35	78.24	23.80 (x2)	40.21	41.47 / 41.57	40.15 / 40.16
<i>iters / temps N = 6 modes</i>		6 / 0.57 s	6 / 2.87 s	<i>iters / temps N = 10 modes</i>		1 / 0.59 s	2 / 3.21 s

Maillage Delaunay T3 (avec CT, masse surfacique U seul)

encastree sur tout le pourtour				libre sur tout le pourtour			
α	f_{th}	N = 40	N = 80	α	f_{th}	N = 40	N = 80
				<i>corps rigide (x3)</i>	0	0	0
11.84	20.00	20.44	19.99	6.09 (x2)	10.29	10.61 / 10.61	10.47 / 10.47
24.61 (x2)	41.58	43.81 / 43.88	41.75 / 41.76	10.53	17.79	17.99	17.65
40.41(x2)	68.27	74.82 / 75.06	68.85 / 68.86	14.19 (x2)	23.98	25.03 / 25.04	24.35 / 24.35
46.14	77.96	85.80	78.62	23.80 (x2)	40.21	42.15 / 42.21	40.32 / 40.33
<i>iters / temps N = 6 modes</i>		5 / 0.49 s	7 / 2.72 s	<i>iters / temps N = 10 modes</i>		1 / 0.54 s	3 / 3.34 s

Plaque circulaire de masse nulle avec une masse ponctuelle au centre

diamètre = a = 10

m = 1000

Encastré aux bords :

$$f = \frac{\alpha}{2\pi} \sqrt{\frac{Eh^3}{ma^2(1-\nu^2)}}$$

Appui simple aux bords :

$$f = \frac{\alpha}{2\pi} \sqrt{\frac{Eh^3}{ma^2(1-\nu)(3+\nu)}}$$

Maillage Delaunay Q4 (avec CT, masse surfacique U seul)

encastrée sur tout le pourtour				appui simple sur tout le pourtour			
α	f_{th}	N = 40	N = 80	α	f_{th}	N = 40	N = 80
4.09	27.29	27.47	27.17	4.09	17.13	17.16	17.10
<i>iters / temps N = 1 mode</i>		1 / 0.25 s	1 / 1.08 s	<i>iters / temps N = 1 mode</i>		1 / 0.27 s	1 / 1.14 s

Maillage Delaunay T3 (avec CT, masse surfacique U seul)

encastrée sur tout le pourtour				appui simple sur tout le pourtour			
α	f_{th}	N = 40	N = 80	α	f_{th}	N = 40	N = 80
4.09	27.29	27.89	27.29	4.09	17.13	17.26	17.13
<i>iters / temps N = 1 mode</i>		1 / 0.24 s	1 / 1.00 s	<i>iters / temps N = 1 mode</i>		1 / 0.27 s	1 / 1.10 s